ネットワーク型待ち行列が積形式解をもつための必要十分条件

東京理科大学　*高田 寛之　TAKADA Hiroyuki
01602570　東京理科大学　宮沢 政清　MIYAZAWA Masakiyo

1. 初めに

ネットワーク型待ち行列の状態の定常分布を求めることは一般に困難であるが，ある種の条件の下では，その分布が周辺分布の積となり（これを積形式と呼ぶ），解析的に求めることが可能である．また，応用上は積形式を仮定してシステムの評価等を行う．このように，システムが積形式解を持つか持たないかを判定することは，理論的に興味があるだけでなく，応用上も重要である．このためには，積形式解をもつための必要十分条件について調べる必要があるが，これまでの研究は十分条件 (例えば準可逆性) を与えるものが大部分であった (例えば，[1, 2, 3, 5] 参照)．今回，客の種類が 1 つの場合について次の結果が得られた．

- 積形式解の必要十分条件が得られ，その条件は既知の十分条件である準可逆性よりも弱い（積形式解をもつが，準可逆性が成立しない例がある）．
- 積形式解にある種の局所平衡条件条件を加えると，準可逆性と同値になる．

2. モデルの設定

文献 [1] に従って，1 種類の客と N 個のノードを持つ開放ネットワーク型待ち行列を定義する．各ノードはそれ自体がネットワークであっても良い．各ノードを $i \in J := \{1,\ldots,N\}$ で表す．但し 0 は外部を表し，$i \in J_0 := \{0,\ldots,N\}$ とする．

まず各ノード $i \in J_0$ の特性を与える．

- ノード i の状態空間を高々可算な要素を持つ集合 S_i で表し，特に $S_0 := \{0\}$ とする．
- ノード i へ到着，内部推移，退去がある時，状態が $x_i \to x_i'$ と変化する確率や率をそれぞれ $p_{i,a}(x_i,x_i')$ ，$q_{i,n}(x_i,x_i')$ ，$q_{i,d}(x_i,x_i')$ で表す．但し全ての項は非負であり，定義されない項は 0 であるとする．また $i \in J_0, x_i \in S_i$ に対し $\sum_{x_i' \in S_i} p_{i,a}(x_i,x_i') = 1$ とする．ノード 0 については $p_{0,a}(0,0) := 1$ ，$q_{0,n}(0,0) := 0$ ，$q_{0,d}(0,0) := \beta_0 > 0$ とする．

ネットワークは次のように定義される．

- ノード $i \in J_0$ を出た客が次にノード $j \in J_0$ に入るルーティング確率を $r_{i,j} \geq 0$ で表す．但し $i \in J_0$ に対し $\sum_{j\in J_0} r_{i,j} = 1$ であり，このルーティングに対して J_0 は既約であるとする．
- 状態空間 S を $S := \prod_{i\in J} S_i$ で表す．
- このネットワークの状態を $\boldsymbol{x} \in S$で表すと連続時間型マルコフ連鎖として表現でき，その推移率 Q は次式で与えられる．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in S$ に対し

$$Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \sum_{i,j\in J_0} Q_{i,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$$

ここに $Q_{i,j}$ $(i,j \in J_0)$ は以下のように与える．

$$\begin{aligned} Q_{i,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') &:= \mathbf{1}[\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_i'(x_i)] \times \\ &\quad \Big(\sum_{y_i\in S_i} q_{i,d}(x_i,y_i)\, r_{i,i}\, p_{i,a}(y_i,x_i') + q_{i,n}(x_i,x_i')\Big), \\ Q_{i,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') &:= \mathbf{1}[\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{i,j}'(x_i,x_j)] \times \\ &\qquad q_{i,d}(x_i,x_i')\, r_{i,j}\, p_{j,a}(x_j,x_j')) \quad (i \neq j). \end{aligned}$$

Definition 2.1. [定常分布と局所平衡条件]

分布 $\boldsymbol{\pi}$ が (2.1) 式を満たすとき，$\boldsymbol{\pi}$ を推移率 Q に対する定常分布と呼ぶ．$\boldsymbol{x} \in S$ に対し

$$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x}) \sum_{\boldsymbol{x}'\in S} Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \sum_{\boldsymbol{x}'\in S} \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x}')\, Q(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}) \ . \quad (2.1)$$

また，数の集まり $\{\gamma_i\}_{i\in J_0}$ があって，$\sum_{j\in J_0}\gamma_j = 0$ を満たし，任意の $i \in J_0$ に対して，

$$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x}) \left(\sum_{j\in J_0} \sum_{\boldsymbol{x}'\in S} Q_{i,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') + \gamma_i \right) = \sum_{j\in J_0} \sum_{\boldsymbol{x}'\in S} \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x}')\, Q_{j,i}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}) \ . \quad (2.2)$$

を満たすならば，γ_i-局所平衡条件と呼ぶ．特に，$\gamma_i = 0$ $(i \in J_0)$ ならば，(2.2) を局所平衡条件と呼ぶ．この定義は，文献 [2] による．

Definition 2.2. [積形式]

Q の定常分布 π_i $(i \in J)$ が次式を満たすとき，分布 $\boldsymbol{\pi}$ は積形式をもつという．$\boldsymbol{x} := (x_1, \ldots, x_N) \in S$ に対し

$$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i \in J} \pi_i(x_i) \tag{2.3}$$

Definition 2.3. [準可逆性の拡張条件]

$$\mu_i(x_i) := \sum_{x'_i \in S_i} \pi_i(x'_i) q_{i,d}(x'_i, x_i)$$
$$\lambda_i(x_i) := \sum_{x'_i \in S_i} \pi_i(x'_i) p_{i,a}(x'_i, x_i)$$

とする．非負の数のベクトル $\boldsymbol{\beta} := \{\beta_i \geq 0\}_{i \in J_0}$ があって，$i \in J, j \in J \setminus \{i\}, x_i \in S_i, x_j \in S_j$ に対し，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} &(\mu_i(x_i) - \beta_i \pi_i(x_i)) r_{i,j} (\lambda_j(x_j) - \pi_j(x_j)) \\ &+ (\mu_j(x_j) - \beta_j \pi_j(x_j)) r_{j,i} (\lambda_i(x_i) - \pi_i(x_i)) = 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

特に，$\mu_i(x_i) - \beta_i \pi_i(x_i) = 0$ のとき，準可逆性と呼ぶ．

3. 結果

非負の数のベクトル $\boldsymbol{\alpha} := \{\alpha_i \geq 0\}_{i \in J_0}$ と $i \in J_0$, $x_i, x'_i \in S_i$ に対し

$$\begin{aligned} q^{(\alpha_i)}{}_i(x_i, x'_i) &:= (1 - r_{i,i}) \alpha_i p_{i,a}(x_i, x'_i) + q_{i,d}(x_i, x'_i) \\ &+ q_{i,n}(x_i, x'_i) + \sum_{y_i \in S_i} q_{i,d}(x_i, y_i) r_{i,i} p_{i,a}(y_i, x'_i). \end{aligned}$$

とする．$p_{i,a}, q_{i,d}, q_{i,n}$ もそれぞれ α_i に依存して良い．その場合 $p_{i,a}^{(\alpha_i)}, q_{i,d}^{(\alpha_i)}, q_{i,n}^{(\alpha_i)}$ と書くべきであるが簡単のため記号 (α_i) は省略する．また $q_i^{(\alpha_i)}$ についても同様に q_i で表す．

Theorem 3.1.

推移率 Q の定常分布 $\boldsymbol{\pi}$ が積形式をもつならば，

- $\beta_i := \sum_{x_i, x'_i \in S_i} \pi_i(x'_i) q_{i,d}(x'_i, x_i)$
- $\alpha_i := \sum_{j \in J_0 \setminus \{i\}} \beta_j r_{j,i}$
  (トラフィック方程式に対応)

と定義すれば，次のことが成り立つ．

- $i \in J_0$ に対し π_i は q_i の定常分布である．
- $\boldsymbol{\beta}$ は (2.4) を満たす．

逆に，次の条件を満たす，$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ が存在するならば，

- $i \in J_0$ に対し q_i の定常分布 π_i が (2.4) を満す．
- $\alpha_i = \sum_{j \in J_0} \beta_j r_{j,i}$

$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i \in J} \pi_i(x_i)$ は推移率 Q の定常分布である．

Theorem 3.2.

定常分布が積形式をもち，γ_i-局所平衡条件を満たすことは，準可逆性が成り立つことと同値である．

準可逆性は成立しないが，(2.4) 式を満足するネットワーク $(N = 2)$ の例がつくれる．

4. 終わりに

Theorem 3.2 より，(2.4) であり準可逆でないという条件は局所平衡条件でいえばどのような方程式であるかという問題に気づく．一方，複数の種類の客がいるネットワーク型待ち行列の場合には解析がより複雑になり準可逆性が成り立たない場合でも γ_i-局所平衡条件が成り立つ例が存在する．従ってこのモデルでの積形式解の必要十分条件を求める問題をこれからの課題として研究していきたい．なお，本論の結果は，負の客をもつネットワーク ([4] 参照) にも適用できる．

参考文献

[1] Chao, X. and Myazawa, M. 1996a. A Probabilistic Decomposition Approach to Quasi-Reversibility and Its Applications in Coupling of Queues, preprint.

[2] Chao, X. and Myazawa, M. 1996b. On quasi-reversibility and local balance: An alternative deribation of the product-form results, preprint.

[3] Chao, X. and Myazawa, M. 1996c. Early and late signaling mechanisms in queues and queueing networks, preprint.

[4] Gelenbe, E. (1991) Product-form queueing networks with negative and positive customers. *J. Appl. Prob.* 28, 656-663.

[5] Kelly, F. P. 1979. *Reversubukuty and Stochastic Networks*, john Wiley & Sons, New York.