1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

無限期間非定常在庫問題：近視眼的政策と弱エルゴード性

28 01012560　東京工業大学　飯田 哲夫　IIDA Tetsuo

1　はじめに

需要環境が時間とともに変化していくような非定常な状況における在庫問題を取り扱う。有限期間問題であれば、通常の Backward Induction を用いて解くことが可能であるけれども、無限期間問題に対しては適用不可能である。非定常在庫問題は1950年代から研究されてきている問題であり数多くの研究がなされてきている。代表的研究として、Karlin[2],Veinott[6] らは、需要分布が確率順序の意味で増大しているときの近視眼的政策 (Myopic Policy) の最適性を示している。Karlin[3],Zipkin[7] らは、需要分布が周期的に変化するとき、周期的な Base-Stock Policy が最適となることを示している。Morton[4] は、在庫の処分 (disposal) を許したモデルにおいて需要分布が非定常なときの有限期間問題における最適 Base-Stock Level に対する上下限を求め、その差が期間の長さに関して単調に小さくなることを示している。また、Morton and Pentico[5] は、Near Myopic Policy に基づくヒューリスティックな政策をいくつか提案し、有限期間問題において、数値実験によりその政策の有効性を示している。

無限期間の非定常な需要状況において、全期間に渡って最適な政策を一度に求めることは、実際不可能であるため、ここでは、第一期における最適な政策について議論することにする。

また、在庫問題はマルコフ決定過程として定式化することも可能であり、本研究では、Near Myopic Policy と最適政策とが費用の面でそう変わらないことを基礎となるマルコフ連鎖の弱エルゴード性という視点から捉え、また、Near Myopic Policy の Error Bound を導出することを目的とする。

2　諸定義と問題設定

ここで考える在庫問題は、単施設、単商品、リードタイムなし、バックログなしの問題である。考慮する費用は、購入費用、在庫保持費用、機会費用の3つであり、それぞれ線形とする。需要に関しては、各期毎独立に発生するけれども同一分布に従うとは限らないものとする。ただし、固定リードタイムかつバックログありの問題への拡張、および在庫保持費用と機会費用の凸関数への拡張は容易である。

今回用いる記号は以下のとおりとする。

$\tilde{c}$:　単位当たりの購入費用
$\tilde{h}$:　単位当たりの在庫保持費用
$\tilde{p}$:　単位当たりの機会費用
$\tilde{s}$:　単位当たりのサルベージ費用
x_t :　t 期首の発注前在庫量
y_t :　t 期首の発注後在庫量
α :　割引率
$\tilde{f}_t$:　t 期以降にかかる最小費用

そのとき、n 期間問題に対して、最適発注政策を求めるための再帰方程式は以下のようになる。

$$\tilde{f}_t(x_t) = \min_{y_t \geq x_t} \left\{ \tilde{c}(y_t - x_t) + \tilde{L}_t(y_t) + \alpha E_t\left[\tilde{f}_t\left((y_t - D_t)^+\right)\right]\right\}, \quad (1)$$

$$\tilde{f}_{n+1}(x_{n+1}) = -\tilde{s}x_{n+1}, \quad (2)$$

ただし、$\tilde{L}_t(y_t) = \tilde{h}E_t[(y_t - D_t)^+] + \tilde{p}E_t[(D_t - y_t)^+]$.

(1),(2) に対し、Veinott による費用の変換を施すことで購入費用の項を除いた定式化 (チルダなしの記号を使って表される) を用いて、今後は議論を進めていくことにする。

注意 1 有限期間問題においては Base-Stock Policy は最適となることが知られている。そこで、n 期間問題における最適な Base-Stock Level を $y_t^*, (t = 1, 2, \cdots, n)$ と表すことにする。

次に、状態数・行動数ともに有限個の非定常マルコフ決定過程 (Non-homogeneous MDP) として定式化する。NMDP は (S, A, P_t, c_t) で定義される。

状態空間　$S = \{0, 1, 2, \cdots, M\}$,
行動空間　$A(s) = \{0, 1, 2, \cdots, M - s\}$,
$A = \bigcup A(s)$,
費用関数　$c_t(s, a) = L_t(s + a)$,
推移確率

$$p_t(i, a, j) = \begin{cases} P[D_t = i + a - j] & (j > 0,\ j \leq i + a) \\ P[D_t \geq i + a] & (j = 0) \\ 0 & (j > i + a) \end{cases}$$

決定関数　$\pi_t : S \to A$
戦略　$\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots)$、全ての戦略の集合を Π とする。

そのとき、n 期間の期待費用最小化問題 $\mathbf{P(n)}$ は、

$$\mathbf{P(n)}\ :\ \min_{\pi\in\Pi}\left\{\tilde{C}_1^n(\pi)\equiv E_{s_0}^{\pi}\sum_{t=1}^{n}\alpha^{t-1}c_t(X_t,A_t)\right\}.$$

注意 2 無限期間問題は、n を ∞ に置き換えて定義される。

3 弱エルゴード性と MDPs

非定常マルコフ決定過程において重要な役割を果たす弱エルゴード性を定義しておく。

定義 1 すべての l に対して、$\tau(P_l^n(\pi))\to 0$ *as* $n\to\infty$ が成り立つとき、戦略 π によって定まるマルコフ連鎖は、弱エルゴード的であるという。ただし、τ は、*proper* なエルゴード係数、$P_l^n(\pi)=P_l(\pi)\cdots P_n(\pi)$ とする。

Proper なエルゴード係数として、ここでは $\tau_1(P)=1-\sum_{j=1}^n \min_i p_{ij}$ を採用する。

Alden and Smith[1] を拡張した以下の補題および命題が成り立つ。

補題 1 任意の $t,\ \pi\in\Pi,\ P_t(\pi)$ に対して、$\tilde{P}_t(\pi)$ および戦略に依存しない *stable* な行列 $\tilde{S}_t$ が存在し、

$$P_t(\pi)=\beta_t\tilde{P}_t(\pi)+\tilde{S}_t,$$

ただし、 $\beta_t=1-\sum_j\min_{\pi\in\Pi}\min_i P_t(i,j)(\pi).$

エルゴード係数 β_t を用いた新しい問題 $\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{(n)}$ を以下のように定義する。

$$\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{(n)}\ :\ \min_{\pi\in\Pi}\left\{\tilde{C}_1^n(\pi)\equiv\sum_{t=1}^{n}\alpha^{t-1}\left(\prod_{k=1}^{t-1}\beta_k\right)\tilde{P}_1^{t-1}L_t(\pi)\right\}.$$

問題 $\mathbf{P}$ の最適戦略の集合を $\Pi^*(\mathrm{P})$ と表すことにする。

定義 2 $\Pi^*(\mathrm{P})=\Pi^*(\tilde{\mathrm{P}})$ のとき、問題 $\mathbf{P}$ と問題 $\tilde{\mathbf{P}}$ は等価であるという。

そのとき、Alden and Smith[1] が示しているのと同様の以下の命題が成り立つ。

命題 2 $\forall n$ に対して、問題 $\mathbf{P(n)}$ と問題 $\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{(n)}$ は等価である。

4 在庫モデルの性質

命題 3 任意の n 期間問題に対して、$y_t^*(n)<M$ であるとき、$y_t^*(n)$ は M を増加させても変化しない。

注意 3 y_t^M を t 期における Myopic Policy とする。そのとき、任意の n 期間問題に対して、

$$y_t^*(n)\le y_t^M$$

となっていることが知られている (Morton and Pentico[5]) ので、在庫量の上限の一つの候補として、第一期の Myopic Policy から得られる Base-Stock Level を採用してもよい。

命題 4 任意の n 期間問題において、

1. サルベージ費用をゼロにしたときの最適 Base-Stock Level は、無限期間問題における最適 Base-Stock Level の上限になっている。

2. 単位当たりのサルベージ費用を $\frac{h}{1-\alpha}$ にしたときの最適 Base-Stock Level は、無限期間問題における最適 Base-Stock Level の下限になっている。

5 Near Myopic Policy の Error Bound

$C_1^\infty(\pi_1^*(n);\pi^*)$: 第一期は、n 期間問題における最適発注政策をとり、第二期以降は無限期間における最適戦略をとったときの期待費用と最小期待費用との差

y_1^U,y_1^L : 第一期における最適 Base-Stock Level の上・下限

とするとき、費用差は以下のように押えられる。

命題 5

$$|C_1^\infty(\pi_1^*(n);\pi^*)|\le\frac{\alpha^{n-1}\left(\prod_{k-1}^{n-1}\beta_k\right)h(y_1^U-y_1^L)}{1-\alpha}.$$

上で求めた Error Bound の効果を調べるために、様々な需要のケースを想定しての数値実験を行なっている。その結果については、当日発表する予定である。

参考文献

[1] Alden,J.M. and R.L.Smith, *Oper. Res.* **40**, No.2 (1992), 183-194.

[2] Karlin,S., *Management Sci.* **6** No.3 (1960), 231-258.

[3] Karlin,S., *J. SIAM*, **8** No.4 (1960), 611-629.

[4] Morton,T.E., *Management Sci.*, **24** No.14 (1978), 1474-1482.

[5] Morton,T.E. and D.W.Pentico, *Management Sci.*, **41** No.2 (1995), 334-343.

[6] Veinott,A.F.,Jr., *Multistage Inventory Models and Techniques*, Stanford University Press, Stanford, CA, 1963.

[7] Zipkin,P., *Management Sci.*, **35** No.1 (1989), 71-80.