1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

共有地の悲劇とコア

01504620　東洋大学　*船木由喜彦　FUNAKI　Yukihiko
東京都立大学　大和毅彦　YAMATO　Takehiko

1．はじめに

本論文では共有地の資源が過剰に利用された結果，様々な社会的損失が生ずる状況「共有地の悲劇」の問題において，個人の協力の可能性を分析する．資源の利用を節約するために各個人が提携を形成し，資源利用量の調整を行うことを計画した場合，最も重要なのは提携外のメンバーの行動をいかに考えるかである．かれらは自由気ままに資源を利用するかも知れないし，提携を形成し節約的に資源を利用するかも知れない．本論文では，これを外部の提携形成に関する予想ととらえ，協力ゲームの分割関数形ゲームの手法を用いて分析を行っている．

2．提携構造と均衡

n人の漁師から成る漁村を考え（$n \geq 2$），漁師の集合を$N=\{1,2,..,n\}$とする．各漁師は湖で魚を捕るための労働時間を決定する．いま，ωを各漁師の初期保有，すなわち，可能な総労働時間（例えば24時間）とし，$x_i \in [0,\omega]$を漁師iが魚を捕るための労働投入量を表すものとする．よって，漁師iの余暇時間は$\omega - x_i$で表される．総労働投入量を$x_N \equiv \sum_{j \in N} x_j$で表すと，各$x_N$の値に対してどれだけ魚が捕れるかは生産関数$f$によって記述される．ここで$f'(x_N)>0$と$f''(x_N)<0$を仮定する．漁師$i$が捕獲できる魚の量は，$x_i f(x_N)/x_N$であり，魚の価格を1とし，余暇の機会費用を$q$で表すと，漁師$i$の所得は，

$$m_i(x_1,x_2,\dots,x_n)=\frac{x_i}{x_N}f(x_N)+q(\omega - x_i)$$

で表される．

漁師の間で協力が全く行われない場合には，ナッシュ均衡の労働投入が行われると考える．労働投入量のリスト$(x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*)$がナッシュ均衡であるとは，任意の$i \in N$，任意の$x_i \in [0,\omega]$について，

$$m_i(x_i^*,x_{-i}^*) \geq m_i(x_i,x_{-i}^*)$$

が成立するときである．ただし，ここで，$x_{-i}^*=(x_1^*,..,x_{-i}^*,x_{i+1}^*,..,x_n^*)$である．

漁師の間でどのような協力が形成されているかを表すため，提携構造の概念を用いる．漁師の集合$N=\{1,2,..,n\}$の分割$\mathcal{P}=\{S_1,S_2,\dots,S_k\}$を提携構造と呼ぶ．ただし，任意の$i=1,..,k$について$S_i \neq \emptyset$，$i \neq j$ならば$S_i \cap S_j=\emptyset$で，$S_1 \cup \dots \cup S_k=N$である．提携$S_i$に属する漁師の間では彼らの総所得$m_{S_i} \equiv \sum_{j \in S_i} m_j$を最大にするように，彼らの労働投入量は決定される．

ある提携構造が$\mathcal{P}=\{S_1,S_2,\dots,S_k\}$が成立しているとしよう．いま，提携$S_i$の総労働投入量を$x_{S_i} \equiv \sum_{j \in S_i} x_j$と表す$(i=1,\dots,k)$とき労働投入量のリスト$(x_{S_1}^*,x_{S_2}^*,\dots,x_{S_k}^*)$が提携構造$\mathcal{P}$の下で均衡であるとは，任意の$i=1,..,k$，任意の$x_{S_i} \in [0,|S_i|\omega]$について，

$$m_{S_i}(x_{S_i}^*,x_{-S_i}^*) \geq m_{S_i}(x_{S_i},x_{-S_i}^*)$$

が成立するときである．

定理1． $\mathcal{P}=\{S_1,S_2,\dots,S_k\}$を任意の提携構造とする．このとき$\mathcal{P}$の下での均衡$(x_{S_1}^*,\dots,x_{S_k}^*)$は，

$$f'(x_N^*)+(k-1)f(x_N^*)/x_N^*=kq,$$

$$x_{S_i}^*=x_N^*/k \ \text{ for all } i=1,\dots,k,$$

をみたす．

3．特性関数形ゲームとコア

この節では協力の結果，最終的に各漁師に分配される利益の配分案を考察する．提携構造$\mathcal{P}=\{S_1,S_2,\dots,S_k\}$が与えられているとき，$(x_{S_1}^*,x_{S_2}^*,\dots,x_{S_k}^*)$を$\mathcal{P}$の下で均衡労働投入量

としよう．$\mathcal{P}$の下での提携$S_i \in \mathcal{P}$の獲得可能な値$v_{\mathcal{P}}(S_i)$を以下のように定義する．

$$v_{\mathcal{P}}(S_i) \equiv \sum_{j \in S_i} m_j(x^*_{S_1}, x^*_{S_2} \dots, x^*_{S_k})$$

提携構造$\mathcal{P} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$が与えられているとき，その下で実現可能な利得ベクトル$z_j \in R^N$は次の条件を満たすベクトルとして定義される．

$$\sum_{j \in S_i} z_j \leq v_{\mathcal{P}}(S_i)$$

ある提携構造によって実現可能な利得ベクトル全体の集合をIとするとき，これらの利得ベクトルの間の支配関係を導入する．2つの実現可能な利得ベクトルzとz'に対し，ある提携Sが存在して，次の2条件を満たすときzはz'を支配するといい，$z \;\; dom \;\; z'$とかくことにする．

（1）　$\forall \mathcal{P} \ni S, \quad \sum_{j \in S} z_j \leq v_{\mathcal{P}}(S)$

（2）　$z_j > z'_j \quad \forall \; j$ with $j \in S$

さらに，条件 $\sum_{j \in N} z_j = v_{\mathcal{P}^N}(N)$ をみたす利得ベクトルの集合を$\mathcal{E}$とする．

われわれは最終的な分配の候補として，いかなる実現可能な利得ベクトルにも支配されない実現可能利得ベクトルを考え，その集合をコアと名づける．コアCは次のように定義される．

$$C = \{z \in I | \neg \exists z' \ni z' \;\; dom \;\; z\}$$

明らかに $C \subset \mathcal{E}$ が成り立つ．一方，$v(N) = v_{\mathcal{P}^N}(N)$ としたときTUゲーム(N,v)のコア$C(v)$は任意の提携について，その提携に所属するプレイヤーの利得の和が，その提携の獲得可能な値以上を実現するような利得ベクトルの集合である：

$$C(v) \equiv \{z \in \mathcal{E} | \sum_{j \in S} z_j \geq v(S), \forall S \subset N, S \neq N\}$$

この2つのコアについて，次のレンマと定理が成り立つ．

レンマ1． $v(S) = \min_{S \in \mathcal{P}} v_{\mathcal{P}}(S)$

とするとき，Cと$C(v)$は一致する．

定理2． $C(v) \neq \emptyset$

4．楽観的な予想の場合のコア

この節では，人々が楽観的な予想をしているケースを考える．このケースにおいて，実現可能な利得ベクトルの間の支配関係 $\underline{dom}$ は次の用に定義される．

$z \;\; \underline{dom} \;\; z' \iff \exists S \in \mathcal{P}$ s. t.

（1）$\sum_{j \in S} z_j \leq v_{\mathcal{P}}(S)$

（2）$z_j > z'_j$　for all j with $j \in S$

すなわち，自分たちにとって最も好ましい提携構造が成立すると考えて，利得ベクトルの間の支配関係を考えている．この支配関係によるコア $\underline{C}$ に対し，次のレンマが成り立つ．

レンマ2． $\hat{v}(S) = \max_{\mathcal{P} \ni S} v_{\mathcal{P}}(S)$

とするとき，$\underline{C}$と$C(\hat{v})$は一致する．

どのような提携構造が成立するかについて人々の予測が，悲観的である場合にはコアは存在することを定理2は示している．しかし，提携構造に関する予測がより楽観的である場合には，コアは存在するとは限らない．これをより詳しく考察するため以下の特性関数形ゲームを考える．ある整数r, $1 \leq r \leq n-1$が与えられた下で，特性関数w^rを次のように定義する．

$$w^r(S) = \max_{\mathcal{P} \ni S} v_{\mathcal{P}}(S) \qquad \text{if } |S| = r$$
$$= \min_{\mathcal{P} \ni S} v_{\mathcal{P}}(S) \qquad \text{otherwise.}$$

このゲームについて次の定理が成り立つ．

定理3 rを$n \geq 4r$なる自然数とする．このとき，任意のゲーム(N, w^r)に対し，

$$C(w^r) = \emptyset$$

が成り立つ．

References

Chander, P. and H. Tulkens (1995) "The Core of an Economy with Multilateral Environmental Externalities," CORE Discussion Paper 9550.

Roemer, J. (1989) "Public Ownership Resolution of the Tragedy of the Commons," *Social Philosophy and Policy* 6, 74-92.

Roemer, J. and J. Silvestre (1993) "The Proportional Solution for Economies with both Private and Public Ownership," *Journal of Economic Theory* 59, 426-444.

Thrall, R. M. and W. F. Lucas (1963) "*n*-Person Games in Partition Function Form," *Naval Research Logistic Quarterly* 10, 281-298.