1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

ある配置ゲームについて

02991404 大阪府立大学 *張 永新 ZHANG Yongxin
01302694 大阪府立大学 寺岡義伸 TERAOKA Yoshinobu

1 Introduction

空間競争配置問題(Location Problem of Spatial Competition)は最初にHotelling[1]によって研究され、そこでは、同一製品を生産する二つの企業がある直線上の市場に分布している顧客に商品を提供し、互いに配置位置および商品価格を選び、自分の利益を最大にするために競争するモデルが取り扱われました。本報告では、差別化価格(discriminatory price: a firm can charge each customer a different price)を導入し、一つ一般顧客分布関数による空間競争配置モデルを考え、そのモデルを2段非協力2人ゲームとして取り扱い、ゲームの配置平衡点及び価格平衡点の存在性について考察する。

2 The model

モデル:

(1)売手である player A , B は長さ1の線分の上にそれぞれ $x, y (0 \le x \le 1, x < y \le 1)$ の所に店を配置する。ここでは、x, yはパラメーターである。同じ商品を顧客に提供する。商品の生産コストを0とおく、顧客はこの線分上で確率分布関数 F に従って分布していて、F の密度関数 f は連続である。各顧客は一回毎に商品を一つだけ買う。顧客は常に総価格が一番低い player の商品を買う。総価格は商品の値段プラス移動費用である。移動費用は線形で単位距離あたり1とする。(i.e $c(d) = d$、 d は顧客の場所から player の場所までの距離である。)移動費用は顧客側が負担する。総価格が等しくなる場合には、確率 $\frac{1}{2}$ で両 player の所へ商品を買う。

(2)両 player A , B は最初に同時に配置 (x, y) を選び、次に商品の価格 (p_A, p_B) を選択し、自分の利得を最大にしようとする。ここでは、$p_A \in [0,1]$ ； $p_B \in [0,1]$ を仮定する。

われわれは、この配置ゲームを2段非協力ゲーム (two-stage non-cooperative game) として考える。最初段階には両 player が同時に (x, y) の所に配置する。第二段階には商品の価格 (p_A, p_B) を選択する。各 player の利得は第二段階の後でえられる。 z 場所の顧客に対して、両 player の差別化価格 $p_A(z), p_B(z)$ とおく。又、両player A,B が顧客を獲得する領域をそれぞれ C_A,C_Bとおくと、$C_A = \{z \in [0,1]: p_A(z) + |z-x| \le p_B(z) + |z-y| \ and \ |z-x| \le |z-y|\}$, $C_B = \{z \in [0,1]: p_B(z) + |z-y| \le p_A(z) + |z-x| \ and \ |z-y| \le |z-x|\}$. player A,B の利得は次の様になる:

$$\pi_A(p_A, p_B, x, y) = \int_{C_A} p_A(z) f(z) dz \qquad \pi_B(p_A, p_B, x, y) = \int_{C_B} p_B(z) f(z) dz$$

3 The equilibrium analysis

先ず z 場所の顧客に対して、両 player の平衡価格 $(p_A^*(z), p_B^*(z))$ を求める。player A にとって z 場所の顧客を獲得する為に次の条件を満たさなければならない:$p_A(z) + |z-x| \le p_B(z) + |z-y|$ 即ち、$p_A(z) \le p_B(z) + |z-y| - |z-x|$、一方、player B は$z$場所の顧客を獲得する為に価格を下げていく:$p_B(z) \to 0$, $\quad p_A(z) \le |z-y| - |z-x|$. だから、$p_A^*(z) = max\{|z-y| - |z-x|, 0\}$、同様に、$p_B^*(z) = max\{|z-x| - |z-y|, 0\}$

Proposition 1 : 差別化価格戦略 (p_A^*, p_B^*) は Nash 平衡点ある。i.e

$$\begin{cases} \pi_A(p_A^*, p_B^*, x, y) \ge \pi_A(p_A, p_B^*, x, y) & for \ \forall p_A \in [0,1] \\ \pi_B(p_A^*, p_B^*, x, y) \ge \pi_B(p_A^*, p_B, x, y) & for \ \forall p_B \in [0,1] \end{cases}$$

次に、平衡差別化価格戦略 (p_A^*, p_B^*) のもとで、平衡配置 (x, y) を求める。

$$\begin{aligned} C_A &= \{z \in [0,1]: p_A^*(z) + |z-x| \le p_B^*(z) + |z-y| and |z-x| \le |z-y|\} \\ C_B &= \{z \in [0,1]: p_B^*(z) + |z-y| \le p_A^*(z) + |z-x| and |z-y| \le |z-x|\} \end{aligned}$$

とおくと、player A,B の利得は次の様になる：

$$\begin{aligned} \pi_A(p_A^*, p_B^*, x, y) &= \int_{C_A} p_A^*(z) f(z) dz = \int_0^x (y-x) f(z) dz + \int_x^{\frac{x+y}{2}} (x+y-2z) f(z) dz \\ &= (y-x)F(x) + (x+y)[F(\frac{x+y}{2}) - F(x)] - 2\int_x^{\frac{x+y}{2}} z f(z) dz \\ \pi_B(p_A^*, p_B^*, x, y) &= \int_{C_B} p_B^*(z) f(z) dz = \int_{\frac{x+y}{2}}^y (2z-x-y) f(z) dz + \int_y^1 (y-x) f(z) dz \\ &= 2\int_{\frac{x+y}{2}}^y z f(z) dz - (x+y)[F(y) - F(\frac{x+y}{2})] + (y-x)[F(1) - F(y)] \end{aligned}$$

配置 (x, y) は平衡点であれば、次の条件を満たさなければならない：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_A}{\partial x} &= F(\dfrac{x+y}{2}) - 2F(x) = 0 \\ \dfrac{\partial \pi_B}{\partial y} &= 1 + F(\dfrac{x+y}{2}) - 2F(y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x) &= \dfrac{1}{2}F(\dfrac{x+y}{2}) \\ F(y) - F(x) &= \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \pi_A}{\partial x^2} &= \dfrac{1}{2}f(\dfrac{x+y}{2}) - 2f(x) \le 0 \\ \dfrac{\partial^2 \pi_B}{\partial y^2} &= \dfrac{1}{2}f(\dfrac{x+y}{2}) - 2f(y) \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) &\ge \dfrac{1}{4}f(\dfrac{x+y}{2}) \\ f(y) &\ge \dfrac{1}{4}f(\dfrac{x+y}{2}) \end{cases} \tag{3.2}$$

以上の議論により、次の Proposition が得られる：

Proposition 2： 配置 (x, y) が平衡点である必要条件は式 (3.1), (3.2) を満たすことである。

Example :顧客は次のような密度関数 f をもつ確率分布関数 F に従って分布している。*i.e.*

$$f(z) = 12(z - \frac{1}{2})^2 \qquad z \in [0,1]$$

配置 $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt[3]{2}})$ は平衡点である。そして平衡差別化価格は次の様になる：

$$p_A^*(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} & if \quad 0 \le z \le \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}} \\ 1 - 2z & if \quad \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}} \le z \le \dfrac{1}{2} \\ 0 & o.w \end{cases} \qquad p_B^*(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} & if \quad \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}} \le z \le 1 \\ 2z - 1 & if \quad \dfrac{1}{2} \le z \le \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}} \\ 0 & o.w \end{cases}$$

両 player の利得: $\qquad \pi_A = \pi_B = \dfrac{7}{16\sqrt[3]{2}}$

参考文献

[1] Hotelling,H. *stability in competition , Economic Journal vol. 39, pp.41-57, 1929.*

[2] Gabaszewice,J.J. and J.-F.Thisse. *Location in :R.J.Aumann and S.Hart,eds., Handbook of game theory vol. 1, pp. 281-304, 1992.*

[3] Kats,A., *Location-price equilibria in a spatial model of discriminatory, Economics Letters vol.25, pp. 105-109, 1987.*