1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

凸ゲームの仁を求めるアルゴリズム

01605580 東京経済大学 *水谷昌義 MIZUTANI Masayoshi
01206633 松阪大学 佐藤祐司 SATOH Yuuji

1. はじめに

本発表では、n 人凸ゲームの仁を求めるアルゴリズムを提案する。

仁は譲渡可能な n 人協力ゲームの解のひとつとして知られていて、配分の集合が空でないゲームならば常に存在し、しかも唯一の配分からなる。また、核および、存在すればコアにも含まれることがわかっている。

一般の n 人ゲームにおいて仁の配分を求める方法としては KOPELOWITZ アルゴリズム [2] がある。このアルゴリズムには、2^n-1 本の制約条件式をもつ線形計画問題のすべての最適基底解を求める手順が含まれており、最悪の場合にはこの手順を $n-1$ 回繰り返さなければ仁が求められない。

しかし、ARIN,IÑARRA[1] が明らかにした凸ゲームの仁がもつ性質を用いることにより、凸ゲームの場合にはすべての最適基底解を求めなくても仁が計算できることがわかった。しかもこの方法の計算量は退化している制約条件式の本数の多項式オーダーであることも明らかである。そこで我々は凸ゲームの仁を求める新たなアルゴリズムを構築しここに紹介する。このアルゴリズムでは、KOPELOWITZ のものと同様に、線形計画問題を解くことを繰り返しながら仁を求めていく。解くべき問題は制約条件式の本数が多い (2^n-1 本) ので、デュアルシンプレックス法を変形して、スラック変数を導入することなくひとつの最適基底解を見つける方法も同時に提案する。

また、凸ゲームの縮小ゲームのもつ性質を考慮すると、線形計画問題を解くという手順は $n-1$ 回以内の繰り返しで仁の配分が求められることも保証される。

2. 記号と定義

利得の譲渡が可能な協力 n 人ゲームは、プレイヤーの集合 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ と特性関数 $v:2^N\to R$(ただし $v(\emptyset)=0$) との組 (N,v) であり、凸ゲームとは特性関数がつぎの性質をもつときをいう:

$$\text{すべての}S,T\subset N\text{に対して、}v(S)+v(T)\leqq v(S\cap T)+v(S\cup T)\text{が成り立つ。}$$

$S\not\subset T$ かつ $S\not\supset T$ なるすべての S,T についてこの条件が等号なしの不等号で成り立つとき、そのゲーム (N,v) を強い凸ゲームという。

ベクトル $\boldsymbol{x}\in R^n$ が、$x(N)=v(N)$ と、すべての $i\in N$ に対して $x_i\geqq v(\{i\})$ とを満たすとき配分という、ただし $x(S)=\sum_{i\in S}x_i$ という表記を用いる。ある配分 $\boldsymbol{x}$ が与えられたとき、$e(S,\boldsymbol{x})=x(S)-v(S)$ を結託 $S\subset N$ の超過という。ある配分 $\boldsymbol{x}$ に対して、N と $\emptyset$ とを除くすべての結託についての超過を求め、それらを昇順に並べ直して得られた 2^n-2 次元ベクトルを $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x})$ で表す。あらゆる 配分 $\boldsymbol{y}$ についての $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{y})$ のなかで、辞書式順序で比較して最も大きくなる $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x})$ をもつ配分 $\boldsymbol{x}$ の集合をそのゲームの仁という。仁は常にひとつの配分だけからなる。

3. アルゴリズムの概略

まず、つぎの線形計画問題を考える。

最大化 α

条件 $x(N)=v(N)$ および、すべての$^\forall S\subset N, S\neq\emptyset, N$に対して $e(S,\boldsymbol{x})\geq\alpha$

この問題の最適基底解を求める。はじめに、$\alpha=(v(N)-\sum_{i\in N}v(\{i\}))/n$, $x_i=v(\{i\})+\alpha$ という値を与え、$\mathcal{B}=\{\{i\}|i\in N\}$ とする。ここで、$\mathcal{B}$の各結託に関する制約式は等号で成立している。この値では制約条件を満たさない結託Tがあった場合には、その制約条件が等号で満たされるまでαの値を下げる。このとき、なるべくαの値を下げなくてすむような結託を$\mathcal{B}$から選び、その結託とTとを入れ替えて$\mathcal{B}$を更新する。すべての制約条件を満たすまで更新を繰り返して最適基底解 $(\boldsymbol{x}^1,\alpha^1)$ を得る。

最適基底からどの結託ひとつを外しても、稜線ベクトルが計算できる。基底解であるから、αを小さくする方向に向いたものが少なくともひとつは存在する。その結託を $S_i, i=1,2,\cdots,q$とする。このとき、$\mathcal{P}=\{S_i\}\cup\{S_j|S_j\subset S_i^C$ かつ $e(S_j,\boldsymbol{x}^1)=\alpha^1\}$ が Nの分割となる S_iが存在し、$\mathcal{P}$に含まれるどの結託も、仁の配分に対して超過が最小となる結託になる、ということがいえる。よって、このようなNの分割$\mathcal{P}$を見つければ、そこに含まれる結託ごとに、結託のメンバーが総計で得られる配分値が確定する。

ここで、最初の線形計画問題の制約条件式のうち、配分値の総和が確定した結託についてはその値の等号制約式に書き改め、新たな問題に作り直す。以下、同様に手順を繰り返す。

4. アルゴリズムの特徴

線形計画問題の最適基底解を探すためには、初期基底解の基底をひとつずつ入れ替えて求めていく方法をつくった。これにより、数多くの制約条件式をもつ問題の部分問題だけを扱って計算を進められることになる。

Nの分割を探すことは $e(S_j,\boldsymbol{x}^1)=\alpha^1$となっている結託の個数の多項式オーダーの計算量で可能である。もしも強い凸ゲームならば、制約条件式は退化していないので、制約条件を等号で成立させている不等式制約条件式はゲームの人数 n と一致する. この方法が正当であることを保証するために、Arin, Iñarra[1] の示した性質を利用した。

手順を1回行うたびに、値の確定した結託の個数は最低ひとつ増えるので、$n-1$回の繰り返し以内で必ず仁の配分が求められる。ここでは、凸ゲームの縮小ゲームがもつ性質を必要とした。

参考文献

[1] Arin,J., Iñarra,E.: "On the Nucleolus of Convex Games", *Southern European Economics Discussion Series*, D.P.145, 1995.

[2] Kopelowitz,A: "Computation of the Kernels of Simple Games and the Nucleolus of n-person Games", RM-31 Research Program in Game Theory and Mathematical Economics, The Hebrew University of Jerusalem, 1967.

[3] Nishino,H., Mizutani,M., Cui,W.T., Satoh,Y.: "An Algorithm for Finding the Nucleolus of Convex Games", *Mimeo*, 1996.