1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

Farsighted Stability in Prizoners' Dilemma

02202422 東北大学経済学部 *鈴木 明宏 SUZUKI Akihiro
01602970 東京都立大学経済学部 武藤 滋夫 MUTO Shigeo

1 序論

本論文においては、間接支配の下での安定集合及びChwe[1994]により定義されたlargest consistent setを囚人のジレンマに適用し、どのような結果が得られるかを考察する。

2 定義

$N=\{1,2\}$ をプレイヤーの集合、S_i をプレイヤー i の戦略の集合（$i=1,2$）、各プレイヤーの戦略がそれぞれ $x_1 \in S_1$，$x_2 \in S_2$ のときのプレイヤー i の利得を $U^i(x_1,x_2)$ とする２人の戦略形ゲームを考える。最初に、このゲームの戦略の組の集合 $S_1 \times S_2$ 上の間接支配関係を定義する。ある戦略の組の列 $x^0(=x),x^1,\cdots,x^m(=y)$ とプレイヤーの列 $i(1)....i(m)$ があり、$i(k)$ の動き（戦略の変化）によって $x^{k-1} \to x^k$ と移動し、最後に y に到達した時の方が各 $i(k)$ にとって x^{k-1} よりも好ましい時、x は y を間接支配するといい x inddom y で表す。この間接支配の定義はChwe(1994)による。以下ではこの間接支配を用いて $(S_1 \times S_2, \text{inddom})$ の安定集合及びlargest consistent setを考える。まず、以下の２条件を満たす集合 $V \subset S_1 \times S_2$ を $(S_1 \times S_2, \text{inddom})$ の安定集合であるという。

（１）内部安定性：任意の $x,y \in V$ について x inddom y は成立しない。

（２）外部安定性：任意の $y \notin V$ について x inddom y となるような $x \in V$ が存在する。

次に、集合 $K \subset S_1 \times S_2$ が次の２条件を満足するとき、K はconsistent setであるという。

（1）任意の $x \in K$ について $x \to_i x'$ となる全ての $i \in N$ と $x' \in S_1 \times S_2$ を考えると、$x''=x'$ または x'' inddom x' である $x'' \in K$ で $U^i(x'') \le U^i(x)$ となるものが存在する。

（2）任意の $y \notin K$ について $x \to_i x'$ となるある $i \in N$ と $x' \in S_1 \times S_2$ が存在して、$x''=x'$ または x'' inddom x' である任意の $x'' \in K$ に対して $U^i(x'') > U^i(y)$。

最大のconsistent setをlargest consistent set (LCS)という。

3 囚人のジレンマにおける安定集合とLCS

利得行列が表１で表される囚人のジレンマを考える。ここで α_1,β_1 と α_2,β_2 はそれぞれ「協力する」と「裏切る」に対応する。

1 ＼ 2	β_1	β_2
α_1	4，4	0，5
α_2	5，0	1，1

表１：囚人のジレンマの利得行列

取りうる戦略が純戦略の場合には、安定集合，LCSは共に $\{\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2\}$ となる。

次に混合戦略の場合を考えると各プレイヤーの戦略集合は $S_i=[0,1]$（$i=1,2$）で表される。

また、x_1,x_2 はそれぞれプレイヤー１，プレイヤー２が α_1,β_1 をとる確率とする。すると、戦略の組が $x=(x_1,x_2)$ のときのプレイヤー i の利得は以下のようになる。

$$U^i(x)=1-x_i+4x_j \quad (i \ne j)$$

この時以下の結果が得られる。

(i) $O'=(x_1,x_2)$（ただし、x_1,x_2 の内少なくとも一方は１）とする。連続でOからO'に向かって両者の利得が増加していく線OO'（図１参照）上の点全体の集合をVとするとVは $(S_1 \times S_2, \text{inddom})$ の安定集合となる。

(ii)LCSは個人合理的な点全てから成る集合である。

4　joint move の導入

これまでは各プレイヤーが単独で動く場合のみを考察してきたが、次に両者が同時に動くことを許した場合について考察する。前節の「inddom」に対応して提携で動く事を許すという意味で「c-」を付け加えた「c-inddom」の支配関係が得られる。また、「inddom」を「c-inddom」に置き換えることで $(S_1 \times S_2, \text{c-inddom})$ の安定集合，提携を許した largest consistent set（c-LCS）を考える事が出来る。これらを用いて前節と同様の分析を行う。純戦略の場合には、安定集合，c-LCS は共に $\{\alpha_1\beta_1\}$ となる。

また、混合戦略の場合には以下の結果が得られる。(i) $(S_1 \times S_2, \text{c-inddom})$ の安定集合は以下の２種類のみである。①厳密に個人合理的かつパレート効率的な点１点のみからなる集合（図２参照）。②点(0,0) と点(1,1/4)（又は(1/4,1)）よりなる集合（図３参照）。(ii) c-LCS は個人合理的な点全てから成る集合である。

5　結論

この分析の結果、純戦略においては間接支配の安定集合と largest consistent set は一致したが混合戦略の場合には異なる結果が得られた。また、無限回繰り返しゲームでの均衡と間接支配の安定集合との関連が見られた。つまり、joint move を含まない場合には全ての個人合理的な点はある安定集合に含まれるという Folk Theorem と類似の結果が得られ、joint move を含む間接支配の安定集合では（裏切る，裏切る）以外ではパレート効率的な点のみが残るという、renegotiation-proof 均衡を繰り返しゲームに適用した場合に得られる結果と非常に類似した結果が得られた。

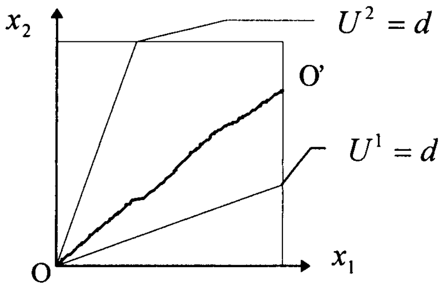

図１：$(S_1 \times S_2, \text{inddom})$ の安定集合

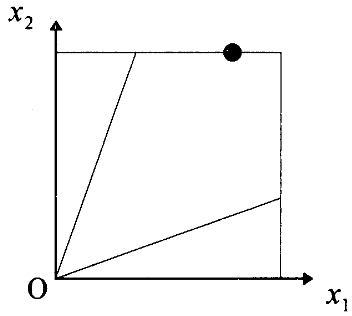

図２：$(S_1 \times S_2, \text{c-inddom})$ の安定集合①

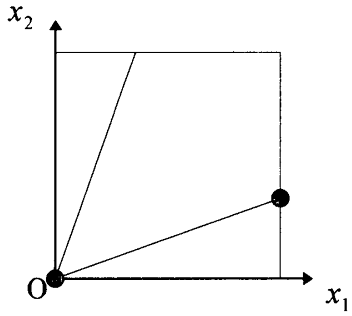

図３：$(S_1 \times S_2, \text{c-inddom})$ の安定集合②

参考文献

Chwe,M.S.-K., "Farsighted Colitional Stability," *Journal of Economic Theory* 63,299-325,1994.

von Neumann,J., and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 3rd ed.,1953.