1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

提携の組まれ易さを考慮した ある交渉集合について

02302264 大阪大学 *鶴見 昌代 TSURUMI Masayo
01204084 大阪大学 塩出 省吾 SHIODE Shogo
01005194 大阪大学 石井 博昭 ISHII Hiroaki

1 はじめに

交渉集合は ある提携が組まれ、その提携に対し何らかの利得が与えられたときの分け方についての解であり、別の提携を組んだと仮定したときの分け方を基準に決定される。しかし、一般的な交渉集合では、解の基準になっている他の提携の組まれ易さという要素は、単独の場合より利得が多く得られるか否か という点で2値的にしか扱われていない。そこで ここではプレイヤー同士の意見の相違などによる提携の組まれ易さを考慮した解の提案を試みるために、以下の仮定に基づく問題に対し、交渉集合を求める。

1. プレイヤーの目的：満足度の最大化。
2. 満足度は イデオロギーと利得に依存する。

2 この問題に対するアプローチ

1. イデオロギーは 一次元の尺度で 測定可能とする。
2. プレイヤー i のイデオロギー尺度 x、利得 y_i に対する満足度を $u_i(x,y_i)$ とし、以下のように定める。

$$u_i(x,y_i) \equiv \alpha_i f_i(x) + (1-\alpha_i) g_i(y_i)$$

ただし、

$f_i(x)$:イデオロギー尺度が x であるイデオロギーに対する、プレイヤー i のゼロ正規化した満足度を与える関数。

$g_i(y_i)$:ゼロ正規化した利得 y_i に対する プレイヤー i の満足度を与える関数。ただしこれは、満足度についてもゼロ正規化されている。

α_i :プレイヤー i にとってのイデオロギーの利得に対する重要度。
$0<\alpha_i<1$

ゼロ正規化 :単独での利得や満足度が 0 となるように 一次変換すること。

さらに ここでは $f_i(x)$, $g_i(y_i)$ を

$$f_i(x) = -(x-m_i)^2/a_i^2$$

ただし、$a_i>0$

$$g_i(y_i) = y_i / \max_{i\in S\subseteq N} v(S)$$

ただし、 N :プレイヤー全体の集合
$S \subseteq N$
$\max_{i\in S\subseteq N} v(S) > 0$ とする。

3 この問題の解法

以上のモデルに対する 3 人ゲームにおいて 2 人提携を組んだときの交渉集合を求める。

提携 $\{i,j\}$ において、提携として選択するイデオロギーを $x_{(ij)}$、プレイヤー i の利得を $y_{i(ij)}$ とし、プレイヤー i の満足度を $u_i(x_{(ij)}, y_{i(ij)}) = \beta_{i(ij)}$ とおく。これを $y_{i(ij)}$ について 解き、また $y_{i(ij)}+y_{j(ij)} = v(\{i,j\})$(1) ($v(\{i,j\})$: 提携 $\{i,j\}$ を組むことによって単独の場合より増えた利得)を用いると、提携 $\{i,j\}$ において $x_{(ij)}$,$y_{i(ij)}$ を軸としたときの プレイヤー i の関数とプレイヤー j の関数はそれぞれ以下のように表される。

$$y_{i(ij)} = A_i(B_i(x_{(ij)}-m_i)^2 + \beta_{i(ij)}) \tag{2}$$

$$\begin{aligned} y_{i(ij)} &= v(\{i,j\}) - y_{j(ij)} \\ &= -A_j(B_j(x_{(ij)}-m_j)^2 + \beta_{j(ij)}) \\ &\quad + v(\{i,j\}) \end{aligned} \tag{3}$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

ただし、$A_i = \max_{i \in S \subseteq N} v(S)/(1-\alpha_i) > 0$
$B_i = \alpha_i / a_i{}^2 > 0$
この 2 つの関数の描くグラフについて考えると、以下のことがわかる。

提携 $\{i,j\}$ においてプレイヤー i、プレイヤー j がそれぞれ $\beta^0_{i(ij)}, \beta^0_{j(ij)}$ の値をとることが可能。

$\Updownarrow$

$\beta_{i(ij)} = \beta^0_{i(ij)}$ のときの (2) のグラフと
$\beta_{j(ij)} = \beta^0_{j(ij)}$ のときの (3) のグラフが交点または接点を持つ。

$\Updownarrow$

$\beta_{i(ij)} = \beta^0_{i(ij)}, \beta_{j(ij)} = \beta^0_{j(ij)}$ が

$$A_i \beta_{i(ij)} + A_j \beta_{j(ij)} \le F_{ij} \qquad (4)$$

を満たす。ただし、

$$\begin{aligned} C_i &= A_i B_i \quad > 0 \\ D_{ij} &= C_i + C_j > 0 \\ E_{ij} &= C_i C_j \quad > 0 \\ F_{ij} &= v(\{i,j\}) - E_{ij}(m_i - m_j)^2 / D_{ij} \end{aligned}$$

また、

許容提携:各プレイヤーの満足度がそれぞれ単独の場合以上とりうる提携。すなわち、各プレイヤーにとって組むことが合理的な提携。

許容集合:許容提携 S でとりうるイデオロギーと利得の集合

とすると、以下のことが言える。

提携 $\{i,j\}$ が許容提携である。
$\Longleftrightarrow$(4) が $\beta_{i(ij)} \ge 0, \beta_{j(ij)} \ge 0$ で解を持つ。
$\Longleftrightarrow F_{ij} \ge 0$

提携 $\{i,j\}$ における許容集合は $\beta_{i(ij)} \ge 0$, $\beta_{j(ij)} \ge 0$ を満たす (2), (3) の交点または接点である。

$\Updownarrow$

提携 $\{i,j\}$ における許容集合は $\beta_{i(ij)} = 0$ のときの (2) と $\beta_{j(ij)} = 0$ のときの (3) とで囲まれた凸閉集合である。

(4) において等号が成り立つとき ((2),(3) が接するとき) の $\beta_{i(ij)}$, $\beta_{j(ij)}$ は非劣解の集合である。すなわち、

$$A_i \beta_{i(ij)} + A_j \beta_{j(ij)} = F_{ij} \qquad (5)$$

が成り立つような $\beta_{i(ij)}$, $\beta_{j(ij)}$ が解になると考えられる。

この条件が全ての 2 人許容提携において成り立たなくてはならない。

また、接点は直線

$$x_{(ij)} = \frac{C_i m_i + C_j m_j}{D_{ij}} \qquad (6)$$

上にあり、$\beta_{i(ij)}$, $\beta_{j(ij)}$ が非負であることから、

$$\begin{aligned} &\tfrac{C_i{}^3}{D_{ij}{}^2}(m_i - m_j)^2 \le y_{i(ij)} \le \\ &\quad -\tfrac{C_i{}^2 C_j}{D_{ij}{}^2}(m_i - m_j)^2 + v(\{i,j\}) \qquad (7) \end{aligned}$$

の範囲である。この集合が空になるときその提携は許容提携でない。

このような接点の集合を解集合と呼ぶと、(6),(7) を満たす集合が解集合となっている。

$F_{ij}, F_{ki}, F_{jk} \ge 0$,(5) が成り立つとき以下の 2 つのことが成り立つ。

提携 $\{i,j\}$ においてプレイヤー 1 がプレイヤー 2 に対して異議をもたない。

$$\Longleftrightarrow \quad \beta_{i(ij)} \ge F_{ki}/A_i$$

提携 $\{i,j\}$ においてプレイヤー 1 がプレイヤー 2 に対して異議をもつとき、プレイヤー 2 がその異議に対して必ず逆異議をもつ。

$\Updownarrow$

$$F_{ki}/A_i - \beta_{i(ij)} \le F_{jk}/A_j - \beta_{j(ij)}$$
$$or \quad \beta_{j(ij)} = 0$$

このことより、一般的な交渉集合と似た形の交渉集合が求められ、(1),(2),(6) よりこのとき提携としてどのイデオロギーをとるか、どのような利得配分をすればよいかがわかる。

4 参考文献

鈴木 光男:「ゲーム理論の展開」東京図書 (1973).
鈴木 光男:「新ゲーム理論」勁草書房 (1994).

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.