1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

コスト効率分析における規模の経済性と規模の収穫

01205520　東京理科大学　末吉　俊幸　SUEYOSHI　Toshiyuki
02900270　東京理科大学　*渡辺　伸輔　WATANABE　Shinsuke

1. はじめに

従来の規模の収穫に関する議論は生産性をベースにしたものであった．本研究では規模の経済性の概念を用いることにより，コストベースにおける規模の収穫についての議論を試みる．

2. コストベースのDEA

本研究のコスト効率分析で扱うコストベースのDEAモデルは次のように定式化される．

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & P_k X \\
\text{s.t.} \quad & -\sum_{j=1}^{n} X_j \lambda_j + X \geq 0, \\
& \sum_{j=1}^{n} Y_j \lambda_j \geq Y_k, \\
& L \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leq U, \\
& X \geq 0,\ \lambda_j \geq 0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここで，

P_k：対象事業体（DMU_k）の入力価格ベクトル，

X：入力量に関する変数ベクトル，

X_j，Y_j：各DMUの入力ベクトル，出力ベクトル，

λ_j：各データをつなげ convex ball を形成するための変数ベクトル，

Y_k：DMU_kの出力ベクトル

である．

さらに (1) 式の双対モデルは以下のように表現される．

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & WY_k + \sigma_1 L - \sigma_2 U \\
\text{s.t.} \quad & -VX_j + WY_j + \sigma_1 - \sigma_2 \leq 0,\ j = 1, \ldots, n, \\
& V \leq P_k, \\
& V \geq 0,\ W \geq 0,\ \sigma_1 \geq 0,\ \sigma_2 \geq 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

ここで，

V：(1) 式の最初の制約式に関する双対変数ベクトル，

W：(1) 式の2番目の制約式に関する双対変数ベクトル，

σ_1，σ_2：(1) 式の3番目の制約式に関する双対変数，

である．

(1)，(2) 式より得られる最適目的関数値はDMU_kに対する最小コスト（c_k^*）を表わしており，DMU_kの実測コスト（c_k）と比較することによってコスト基準の効率性を求めることができる．

$$
\text{コスト効率性} = \frac{c_k^*}{c_k} = \frac{P_k X^*}{P_k X_k}. \tag{3}
$$

3. 規模の経済性 (Degree of Scale Economies)

規模の経済性（ε）は，生産量の拡大によって平均費用が低下する現象をいうが，以下の比率によって定義される．

$$
\varepsilon = AC / MC. \tag{4}
$$

ここで，AC は平均費用，MC は限界費用を表わしている．

(1)，(2) 式の最適解より，DMU_k に対する最小コスト（c_k^*）は，

$$c_k^* = W^*Y_k + \sigma_1^* L - \sigma_2^* U , \tag{5}$$

という関係が導かれる．最適解がユニークに決まる（退化しない）ならば，(5) 式より点 (c_k , Y_k) における支持超平面は，

$$c = W^*Y + \sigma_1^* L - \sigma_2^* U , \tag{6}$$

で表わされる．

(5)，(6) 式より多出力における規模の経済性 (DSE_k) は以下のように表現できる．

$$DSE_k = 1/(1-\xi) . \tag{7}$$

ただし，$\xi = (\sigma_1^* L - \sigma_2^* U)/c_k^* . \quad (\xi \leq 1)$.

4. 規模の収穫 (Returns to Scale)

規模の経済性（ε）と規模の収穫（RTS）との関係は以下のように表わすことができる．

$$\begin{aligned}
&\text{(a) 規模の収穫増加型 (IRTS)} \leftrightarrow \varepsilon > 1 , \\
&\text{(b) 規模の収穫一定型 (CRTS)} \leftrightarrow \varepsilon = 1 , \\
&\text{(c) 規模の収穫減少型 (DRTS)} \leftrightarrow \varepsilon < 1 .
\end{aligned} \tag{8}$$

最適解がユニークに決まるならば，多出力における規模の経済性（DSE_k）と DMU_k の RTS との関係は，(7) 式より以下のように分類される．

$$\begin{aligned}
&\text{(a) } 0 < \xi < 1 , \ \sigma_1^* > 0 && \to \text{IRTS } (DSE_k > 1) , \\
&\text{(b) } \xi = 1 , \ \sigma_1^* = \sigma_2^* = 0 && \to \text{CRTS } (DSE_k = 1) , \\
&\text{(c) } \xi < 0 , \ \sigma_2^* > 0 && \to \text{DRTS } (DSE_k < 1) .
\end{aligned} \tag{9}$$

5. 退化のある場合の規模の収穫

本研究では退化のある場合 (最適解がユニークに定まらないとき) の規模の収穫を求めるアプローチとして，以下のモデルを考えている．

$$\begin{aligned}
\text{Max / Min} \quad & \sigma_1 L - \sigma_2 U \\
\text{s.t.} \quad & -VX_j + WY_j + \sigma_1 - \sigma_2 \leq 0 , \ j = 1, \dots, n , \\
& V \leq P_k , \\
& WY_k = c_k^* , \\
& V \geq 0 , \ W \geq 0 , \ \sigma_1 \geq 0 , \ \sigma_2 \geq 0 .
\end{aligned} \tag{10}$$

このモデルは (2) 式がベースとなっており，ξ の上限は (10) 式の目的関数を最大化することで得られ，ξ の下限は (10) 式の目的関数を最小化することで得られる．これにより規模の経済性 (DSE_k) が求まり，最終的に規模の収穫 (RTS) のレベルも定まることになる．

参考文献

Sueyoshi, T., "Mesuring Efficiencies and Returns to Scale of Nippon Telegraph & Telephone Production and Cost Analyses," *Management Science*, (Printing in 1997).