DEAアルゴリズムを用いた
技術、配分、コスト効率性の測定

01205520　東京理科大学　末吉　俊幸　SUEYOSHI Toshiyuki
02900290　東京理科大学　*渡部　公太郎　WATABE Kotaro

1. はじめに

Charnesらによって最初に提唱されたDEA法は、多大なアルゴリズム的努力を要求するため、効率的なDEAアルゴリズムの発展は重要である。

この論文の目的は、DEAのユニークな構造を利用し、効果的に設計されたDEAアルゴリズムを発展させることである。このDEAアルゴリズムは、生産経済学においてFarrellによって定義された、効率性測定分析に関する三つの概念(即ち、技術効率性(TE)、コスト効率性(OE)、配分効率性(AE))を、少ない計算努力や計算時間で測定することができる。

2. 二つのDEAモデル

ここでは、Farrellの効率性に関する三つの概念を測定するために設計された二つのDEAモデルを紹介する。

$$\begin{aligned}&\text{minimize} && \theta \\ &\text{subject to} && -X\lambda + \theta X_0 \geq 0, \\ &&& Y\lambda \geq Y_0, \\ &&& e^{\mathrm{T}}\lambda = 1, \\ &&& \lambda \geq 0 \text{ and } \theta \text{ is unrestricted,}\end{aligned} \tag{1}$$

ここで、$X \equiv [X_1, X_2, \ldots, X_n]$はインプットの$m \times n$行列、$Y \equiv [Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]$はアウトプットの$s \times n$行列、$e^{\mathrm{T}}$は成分が全て「1」の行ベクトル、そしてλは効率的フロンティアを構成するのに用いられる列ベクトルを表わしている。（1）の最適なθ^*値はDEA効率性、あるいはDMU_0のTEを示しており、その生産活動(X_0, Y_0)と他の活動(X_j, Y_j), $j = 1, \ldots, n$とを比較することにより決定される。

（1）によってTEを決定したら、次のようなDEAモデルを用いてOEの測定を行う。

$$\begin{aligned}&\text{minimize} && P_0\tilde{X} \\ &\text{subject to} && -X\lambda + \tilde{X} \geq 0, \\ &&& Y\lambda \geq Y_0, \\ &&& e^{\mathrm{T}}\lambda = 1, \\ &&& \lambda \geq 0 \text{ and } \tilde{X} \geq 0,\end{aligned} \tag{2}$$

ここで、$\tilde{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^{\mathrm{T}}$は$P_0$に対してコストを最小化するインプットベクトルを表す列ベクトルで、$P_0 = (p_{10}, p_{20}, \ldots, p_{m0})$は$\mathrm{DMU}_0$の観測されたインプットプライスベクトルを示している。数学的には、DMU_0のOEは次のように表される。

$$\mathrm{OE} = C_0^* / C_0 = P_0\tilde{X}_0^* / P_0 X_0 \tag{3}$$

ここで、P_0が与えられたら、$\tilde{X}^*$は（2）によって測定されるコスト最小化インプットベクトルである。さらに、AEはAE=OE/TEによって計算される。

3. アルゴリズム戦略

DEAのユニークな特徴は、TE、AE、OEの程度がDMU_0の活動と効率的フロンティアから得られる活動とを比較することで決定されるということである。つまり最初の段階でTEを持つDMUを見つけることが効率的アルゴリズムの設計において重要な鍵となる。提唱されるアルゴリズムはTE、AE、OEの測定に関して四つの主だったプロセスを持っている。

3.1 分類

最初に、準備段階として、アルゴリズムはすべての DMU 集合 J を J_n と J_d ($J = J_n \cup J_d$)に分ける。J_d と J_n を決定するために、この研究は Pareto によって提唱された優位性(dominance)の概念を用いる。これは簡単なベクトル比較で表現される。

$$[x_{1j},\ldots,x_{mj},-y_{1j},\ldots,-y_{sj}]^{\mathrm{T}} \geq [x_{1j'},\ldots,x_{mj'},-y_{1j'},\ldots,-y_{sj'}]^{\mathrm{T}}. \quad (4)$$

(4)の場合、DMU $_j$ は DMU $_{j'}$ によってドミネイト(dominate)されている。(4)を用いて、J は次のように二つの部分集合に区分される。

$$J_d = \{j \mid \text{there exists some } j' \text{ hat satisfies (4)}\} \text{ and } J_n = J - J_d. \quad (5)$$

J_n はさらに四つの部分集合に、J_d は二つの部分集合に分類される。これらの部分集合は次のように表現される。

$$J_n = E \cup E' \cup IE' \cup IF', J_d = IE \cup IF. \quad (6)$$

このとき、E、E' は効率的フロンティアを構成するのに必要な DMU の集合として定義される。

今、J_n に属する n_1 個の DMU と J_d に属する n_2 個の DMU を仮定する($n=n_1+n_2$)。準備段階では、一時的に $\lambda_j\,(j \in J_d)$ に関する列を(1)のシンプレックス表から除外する。λ_j に関する列の数は、今、n ($\lambda_j\,(j \in J)$ の列の数)から n_1 ($\lambda_j\,(j \in J_n)$ の列の数)に減らされている。

3.2 J_n に属する DMUs の TE 測定

次に、(1)を用いて J_n に属するそれぞれの DMU の TE を測定し、$\lambda_j\,(j \in E' \cup IE' \cup IF')$ に関する列を、その三つの部分集合に属する DMU を確認しながら徐々にシンプレックス表から削除する。結果的に、第二段階の最後ではシンプレックス表には $\lambda_j\,(j \in E)$ に関する列だけが残る。λ_j に関する列の数は今 n_e ($\lambda_j\,(j \in E)$ の列の数)である。

3.3 J_d に属する DMUs の TE 測定

J_n に属する DMUs の TE を測定した後、アルゴリズムは $\lambda_j\,(j \in E)$ に関する列だけ残したまま、J_d に属するそれぞれの DMU の TE 測定に関して(1)を適用する。全列数を減らすことによって DEA アルゴリズムの効率化を図る事ができるのは明らかである。三段階目が終了すると、J に属する全ての DMU に関する TE 測定が完了する。

3.4 すべての DMUs の OE 測定

最後に、(2)のシンプレックス表において $\lambda_j\,(j \in E \cup E')$ に関する列を維持しながら、J に属する全ての DMU の OE を測定する。列の数を減らすことに加えて、(2)のアルゴリズム的な特徴として、n 個の DMU の OE を測定するのに同じアルゴリズム過程を n 回繰り返す際、アルゴリズムは右辺(RHS)とコストベクトル(CV)だけしか変化しないため、感度分析によく似た計算上の枠組みを用いることで計算上の努力を相当に減らすことができる。

また OE = C_k^* / C_k、AE=OE/TE であり、これらの付加的な計算は簡単な分類過程で実行する。

4. 結果と結論

この論文は、Farrell によって提唱された TE、AE、OE を二つの DEA モデルを用いて測定する、効果的に設計されたアルゴリズム手続きを説明した。アルゴリズムの中で、データ集合は六つの独特な部分集合に分けられ、それぞれは異なった計算戦略で解かれる。アルゴリズム戦略の結果として、提唱されたアルゴリズムは通常の改訂シンプレックス法によって要求される CPU 時間の 50％以下で DEA 問題を解くことができた。モンテカルロシミュレーション研究によって特殊設計アルゴリズムの計算上の効率性が証明された。