マルコフ的間欠使用環境下での最適予防保全戦略 I
—- ブロック修理問題の場合 —-

土肥　正（広島大学），海生　直人（広島修道大学），尾崎　俊治（広島大学）

1. はじめに

運用中のシステムの信頼性ならびにコスト有効性を向上させるために，効率的な予防保全スケジュールを実施することは重要である．代表的な予防保全戦略として，年齢取替方策，ブロック取替方策，点検方策などが考えられており，様々なシステムの使用環境に応じたモデル化が行われている（例えば [1]）．

本稿では，システムの使用環境が間欠的かつマルコフ的に推移する場合の確率的予防保全戦略について議論する．すなわち，従来までになされていたモデル化は，ユーザが連続的にシステムを使用することを前提としていた．これに対して本稿では，ユーザのシステムへのアクセスと使用時間が $M/M/1$ 型待ち行列過程を形成する場合について考察を行う．ここでは，システム故障が発生すると修理によってのみ復旧できるものとし，ブロック修理問題と呼ばれる保全問題を取り上げる．まず最初に，定常状態における単位時間当りの期待費用を最小にする最適保全戦略が存在するための条件について述べた後，保全スケジュールを生成するための手続きを提案する．

2. ブロック修理問題

確率的にブロック修理を行う保全モデルについて考える．予防修理を行う時刻 S は確率分布関数 $A(x)$，平均 T をもつ非負の確率変数である．予防保全時刻 S までにシステム故障が生じると直ちに事後修理が開始される．いま，確率過程 $\{X(t), t \geq 0\}$ をシステムの累積使用時間とすれば，事後修理に要する修理時間は年齢 $X(t) = x$ に依存する非負の確率変数 V_x によって表現され，その確率密度関数を $b_x(y)$ のように表わす．更に，予防修理に要する時間 W もまた非負の確率変数であり，その期待値を $E[W]$ とする．本研究で考察する確率システムは，文献 [2,3] で議論された割り込みを伴う待ち行列過程と同様であることに注意されたい．

時刻 $t = 0$ で稼働を開始したシステムが最初の予防修理を開始するまでの時間を有効サービス時間と呼び，それを S_{eff} のように表記する．システム故障の発生が強度 $\lambda(>0)$ のポアソン過程に従うものとすると，有効サービス時間 S_{eff} のラプラス・スチルチェス変換は

$$\alpha_{eff}(s) = E[\exp(-sS_{eff})]$$

$$= \int_0^\infty \exp\left\{-\left[sx + \int_0^x \lambda(1-\hat{b}_\tau(s))\,d\tau\right]\right\} dA(x) \quad (1)$$

となる [2]．ここで，

$$\hat{b}_x(s) = \int_0^\infty e^{-sy} b_x(y)\,dy \quad (2)$$

である．式 (1) より明らかに，期待有効サービス時間は

$$E[S_{eff}] = E[S] + \int_0^\infty dA(x) \int_0^x \lambda E[V_\tau]\,d\tau \quad (3)$$

となる．

予防修理及び事後修理に要する費用は以下の通りである．

$c_1(>0)$ ：予防修理に要する単位時間当りの費用，

$c_2(>0)$ ：事後修理に要する単位時間当りの費用．

これより，確率的戦略 $\pi(\in S)$ の下での単位サービス時間当りの期待費用 C は，

$$C = \frac{c_1 E[W] + c_2 \int_0^\infty dA(x) \int_0^x \lambda E[V_t]\,dt}{E[S]} \quad (4)$$

となる．以下の結果はブロック修理問題を考える際に重要となる．

定理 1：式 (4) で与えられる期待費用の下限は次のようになる．

$$C \geq C(T). \quad (5)$$

ここで，

$$C(T) = \frac{c_1 E[W] + c_2 H(T)}{T}, \quad (6)$$

$$H(T) = \int_0^T h(x)\,dx = \int_0^T \lambda E[V_x]\,dx. \quad (7)$$

上述の結果は，確率的戦略 π は常に一定の時間 T によって予防修理を行う戦略に帰着できることを意味する．

これより，問題は

$$\min_{0\le T<\infty} : C(T) = \frac{c_1E[W]+c_2H(T)}{T} \tag{8}$$

となる．

定理 2：(i) 式 (7) で定義された関数

$$h(x) = \lambda E[V_x] \tag{9}$$

が狭義単調増加関数とする．また，次のような非線形関数を定義する．

$$q(T) = c_2Th(T) - c_1E[W] - c_2H(T). \tag{10}$$

もし $q(\infty) > 0$ ならば，非線形方程式 $q(T^*) = 0$ を満たす有限で唯一のブロック修理時刻 T^* が存在し，そのときの期待費用は

$$C(T^*) = c_2h(T^*) \tag{11}$$

となる．逆に $q(\infty) \le 0$ ならば，$C(T)$ は T の狭義単調減少関数となり，最適ブロック修理時刻は $T^* \to \infty$ となる．

(ii) 関数 $h(x)$ が x に関して一定ならば，$C(T)$ は T の狭義単調減少関数となり，最適ブロック修理時刻は $T^* \to \infty$ となる．

3. マルコフ的使用環境のモデル化

システムは以下の 3 つの状態のいずれかをとる．

状態 1 ： サービス提供中，

状態 2 ： 故障における事後修理中，

状態 0 ： 予防修理中．

文献 [4] に従って，期待修理時間 $E[V_x]$ は x の線形関数であると仮定する．すなわち，

$$E[V_x] = \alpha x + \beta. \tag{12}$$

ここで，α と β は非負の定数とする．次に，修理時間の可変部分 α を，システムを使用するユーザの使用状況を考慮することによって再評価する．

定理 3： 各状態への遷移規則はマルコフ性を有し，その定常推移確率は以下のようになる．

$$\Pi_0(T) = \frac{E[W]}{T+E[W]+H(T)}, \tag{13}$$

$$\Pi_1(T) = \frac{T}{T+E[W]+H(T)}, \tag{14}$$

$$\Pi_2(T) = \frac{H(T)}{T+E[W]+H(T)}. \tag{15}$$

定理 4 [4]：サービス期間中 $[0,T]$ でシステムにアクセスする時間間隔がパラメータ $\gamma\ (>0)$ のポアソン過程に従い，処理時間は独立で同一なパラメータ $\mu\ (>0)$ を持つ指数分布に従うとする．このとき，システムが正常に動作している（状態 1 の）時にサーバーが idle になる確率は

$$p^* = 1 - \frac{\rho}{\Pi_1(T)} \tag{16}$$

となる．ここで ρ はトラフィック強度で

$$\rho = \frac{\gamma}{\mu}. \tag{17}$$

もし式 (12) で与えられる α が時間と独立ならば，定理 2 によって最適ブロック修理時刻を求めればよい．これに対して以降では，$l\ (>0)$ を故障後の修理に要する実質的なサービス時間の割合（既知）とし，

$$\alpha \cong l(1-p^*) \tag{18}$$

と近似することを考える [4]．これより，式 (6) で与えられる期待費用は

$$C(T) = \frac{c_1E[W]}{T} + \frac{\xi + c_2\epsilon T}{2-\epsilon T}. \tag{19}$$

ここで，$\epsilon = \lambda l\rho$ ならびに $\xi = 2c_2\lambda\beta + c_2E[W]\epsilon$ とする．

定理 5： $\alpha > 0$，すなわちパラメータ ϵ の値は十分小さいものと仮定する．このとき，式 (18) の近似の下で，期待費用 $C(T)$ は $0 < T < 2/\epsilon$ で狭義凸関数となり，最適ブロック修理時刻は

$$c_1E[W](2-\xi T^*)^2 = T^{*2}(\epsilon\xi + 2c_2\epsilon) \tag{20}$$

を満たす．

4. おわりに

本稿では，マルコフ的使用環境下でのブロック修理問題について考察し，最適予防修理時刻を導出する手続きについて述べた．今後の課題として，さらに年齢修理問題についても同様な解析を行い，従来の連続使用環境に基づいたモデルとの比較を行う予定である．

参考文献

[1] R. E. Barlow and F. Proschan, *Mathematical Theory of Reliability*, John Wiley & Sons Inc., New York (1965).

[2] J. Keilson, "Queues subject to service interruptions", *Ann. Math. Statist.*, Vol. 33, pp. 1314-1322 (1982).

[3] D. P. Gaver, "A waiting line with interrupted service including priorities", *J. Roy. Stat. Soc.*, Vol. B24, pp. 73-90 (1962).

[4] E. Gelenbe, "On the optimum checkpoint interval", *Journal of the ACM.*, Vol. 26, pp. 259-270 (1979).