到着率の減少を伴う待ち行列システムの最適保全政策
― 修理開始時客を失わない場合 ―

01107945　*小柳　淳二　(KOYANAGI Junji)　鳥取大学工学部
01103205　河合　一　(KAWAI　Hajime)　鳥取大学工学部

1　モデル

サーバーが $s+1$ 個の状態 $0,\dots,s$ を持ち，サーバーの状態 k に対し，到着率 λ_k, サービス率 μ, システム容量 N の $M/M/1/N$ 待ち行列システムを考える．このシステムは客から一人当たり使用料 1 を徴収し，その総期待割引利得の最大化（割引因子 α）を目的とする．サーバーの状態は推移率 β_{kl} で状態 k から l へマルコフ的に推移し，それに伴い到着率も λ_k から λ_l へと変化する．ただし，$\beta_{kl}=0\ (k\ge l)$, $\lambda_k\ge\lambda_l$ $(k\le l)$ とする．すなわち，サーバーは劣化する方向にのみ推移し，劣化により、客の人気がなくなり，到着率が下がることを示す．

サーバーを回復させるには保全作業を必要とするモデルにおいて，小柳，河合 [2] では，修理開始時に客を失う場合を考えた．ここでは，保全を決定したときシステム内にいる客のサービスをすべて終了させてから保全を行う場合を扱う．保全作業を行うという決定は，客の到着，退去，サーバーの状態変化のいずれかの時点で行われ，決定が下されたときシステム内に客がいる場合には，保全作業終了まで新しい客の到着を断り，システム内の客のサービスがすべて終了してから，保全作業を開始するものとする．保全作業には分布関数 $H(x)$ に従う時間が必要であり，保全作業終了後，サーバーは状態 0 になり，到着率は回復する．このようなシステムに対して以下の 2 つの場合を考える．

Model A：客は到着時に使用料 1 を支払う．
Model B：客は退去時に使用料 1 を支払う．

Model A, B に対して以下を仮定する．

仮定 1

1. 到着率 λ_k は k に関して単調減少.
2. すべての u に対し, $\sum_{l=u}^{s}\beta_{kl}$ は k に関して単調増大.

仮定 1.1 はサーバーの劣化が到着率の低下を招くことを示し，仮定 1.2 はサーバーが劣化するほど，劣化の速度があがることを示す．以下の記号を定義する．

$$\lambda=\sum_{k=0}^{s}\lambda_k,\ \Gamma=\sum_{k=0}^{s}\sum_{l=0}^{s}\beta_{kl},\ \Lambda=\lambda+\mu+\Gamma+\alpha,$$

$$\gamma_{kl}=\begin{cases}\Gamma-\sum_{m=0}^{s}\beta_{km} & (k=l)\\ \beta_{kl} & (k\ne l)\end{cases},\ h=\int_0^\infty e^{-\alpha x}dH(x).$$

仮定 1.2. より以下の補題が成立する．(Stoyan [1])

補題 1
減少列 a_l に対し, $\sum_{l=0}^{s}\gamma_{kl}a_l$ は k に関して減少する.

2　システム到着時に使用料を支払う場合

状態 (i,k) からの最適利得関数を $V_A(i,k)$, 状態 (i,k) で保全作業を行うと決定し，以後最適にふるまった場合の利得関数を $M_A(i)$, 状態 (i,k) で稼動を続け，以後最適にふるまった場合の利得関数を $W_A(i,k)$, 状態 (i,k) における，最適決定を $D_A(i,k)$ とすると以下の最適性方程式を得る．

$$W_A(0,k)=\frac{1}{\Lambda}\Big[\lambda_k(V_A(1,k)+1)+\mu V_A(0,k)+\sum_{l=0}^{s}\gamma_{kl}V_A(0,l)+(\lambda-\lambda_k)V_A(0,k)\Big],$$

$$W_A(i,k)=\frac{1}{\Lambda}\Big[\lambda_k(V_A(i+1,k)+1)+\mu V_A(i-1,k)+\sum_{l=0}^{s}\gamma_{kl}V_A(i,l)+(\lambda-\lambda_k)V_A(i,k)\Big]\quad(1\le i\le N-1),$$

$$W_A(N,k)=\frac{1}{\Lambda}\Big[\lambda_kV_A(N,k)+\mu V_A(N-1,k)+\sum_{l=0}^{s}\gamma_{kl}V_A(N,l)+(\lambda-\lambda_k)V_A(N,k)\Big],$$

$$M_A(i)=\left(\frac{\mu}{\mu+\alpha}\right)^i hV_A(0,0),$$

$$V_A(i,k)=\max\{M_A(i),W_A(i,k)\},$$

$$D_A(i,k)=\begin{cases}1 & \text{保全作業を行うのが最適}\ (M_A(i)>W_A(i,k))\\ 2 & \text{稼動を続けるのが最適}\ (M_A(i)\le W_A(i,k))\end{cases}.$$

Model A において $\lambda_0\le\mu$ の仮定を追加する．これは，到着率が常に処理率より小さいことを示す．

逐次近似法を用いて以下の補題が示される．

補題 2

1. $V_A(i,k)\le\mu/\alpha$.
2. $V_A(i+1,k)-V_A(i,k)\ge-1$　かつ
   $W_A(i+1,k)-W_A(i,k)\ge-1$.
3. $W_A(i,k+1)\le W_A(i,k)$　かつ　$V_A(i,k+1)\le V_A(i,k)$.
4. $i\ge1$ に対して，　$W_A(i,k)\ge M_A(i)$.

補題 2 の性質 3, 4 から最適政策の構造について以下の結果を得る.

定理 1

1. ある k に対して $D_A(0,k)=1$ ならば, $l \geq k$ に対して $D_A(0,l)=1$.
2. $i \geq 1$ に対して $D_A(i,k)=2$.

すなわち, 最適政策は下図のような構造をしている.

サーバーの状態

s	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	0									N 系内人数

3 システム退去時に使用料を支払う場合

$V_B(i,k)$, $W_B(i,k)$, $M_B(i)$ と $D_B(i,k)$ を前章と同様に定義すると, 以下の最適性方程式を得る.

$$
\begin{aligned}
W_B(0,k) &= \frac{1}{\Lambda}\Big[\lambda_k V_B(1,k) + \mu V_B(0,k) \\
&\qquad + \sum_{l=0}^{s} \gamma_{kl} V_B(0,l) + (\lambda - \lambda_k) V_B(0,k)\Big], \\
W_B(i,k) &= \frac{1}{\Lambda}\Big[\lambda_k V_B(i+1,k) + \mu(V_B(i-1,k)+1) \\
&\qquad + \sum_{l=0}^{s} \gamma_{kl} V_B(i,l) + (\lambda - \lambda_k) V_B(i,k)\Big] \\
&\qquad\qquad (1 \leq i \leq N-1), \\
W_B(N,k) &= \frac{1}{\Lambda}\Big[\lambda_k V_B(N,k) + \mu(V_B(N-1,k)+1) \\
&\qquad + \sum_{l=0}^{s} \gamma_{kl} V_B(N,l) + (\lambda - \lambda_k) V_B(N,k)\Big], \\
M_B(i) &= \frac{\mu}{\alpha}\left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu+\alpha}\right)^i\right] + \left(\frac{\mu}{\mu+\alpha}\right)^i h V_B(0,0), \\
V_B(i,k) &= \max\{M_B(i), W_B(i,k)\}, \\
D_B(i,k) &= \begin{cases} 1 & \text{保全作業を行うのが最適} \\ & (M_B(i) > W_B(i,k)) \\ 2 & \text{稼動を続けるのが最適} \\ & (M_B(i) \leq W_B(i,k)) \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Model B においては, $\lambda_0 \leq \mu$ を仮定することなく以下の補題が成立する.

補題 3

1. $V_B(i,k) \leq \mu/\alpha$.
2. $V_B(i+1,k) \geq V_B(i,k)$ かつ $W_B(i+1,k) \geq W_B(i,k)$.
3. $W_B(i,k+1) \leq W_B(i,k)$ かつ $V_B(i,k+1) \leq V_B(i,k)$.
4. $i \geq 1$ に対して, $W_B(i,k) \geq M_B(i)$.

補題から Model A 同様, 以下の定理が成立する. (ただし, $\lambda_0 \leq \mu$ を仮定しない.)

定理 2

1. ある k に対して $D_B(0,k)=1$ ならば, $l \geq k$ に対して $D_B(0,l)=1$.
2. $i \geq 1$ に対して $D_B(i,k)=2$.

4 おわりに

小柳, 河合 [2] においては, Model A で $\lambda_0 \geq \mu$ の場合には, 最適政策の構造はサーバーの状態, 系内人数の方向に単調な性質を持つ (下図参照) ことが示されている.

サーバーの状態

s	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	0									N 系内人数

今回のモデルにも同様の性質を示すことができるか検討中である.

また, 今回のモデルの結果がそのまま適用できる拡張モデルとしては

1. 保全ごとに固定費用 R がかかる.
2. 保全終了後, 確率 p_l で状態 l に復帰する.

などがある.

参考文献

[1] Stoyan D., *Comparison methods for queues and other stochastic models*, John Wiley & Sons, 1983.

[2] 小柳淳二, 河合　一, 到着率が減少する待ち行列システムの最適保全政策, 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集, 1996.