1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

ファクター構造を用いたsafety firstモデル

01266490　東京工業大学　鈴木 賢一　Kenichi SUZUKI

1. はじめに

ポートフォリオ選択問題に対して、確率を直接最適化の対象としてモデルの中に取り込んだモデルとして、Roy [2] による、safety first モデルが知られている。また、Charnes and Cooper [1]、Katakoka (1963) などの確率で表現される制約を取り扱うモデルも提案されている。これらのモデルは

- リスクが確率で表現されるため、ポートフォリオの評価を直観的に行なうことができる。
- 平均・分散モデルのように分布の一部のパラメータだけを取り出したモデルと比較して、収益率の分布の情報全体を用いることができる

などの特長がある。特に後者に関しては、分布が、通常用いられるようなパラメータで十分に把握できない場合、大きな利点となるだろう。

しかしながら、実際にこれらのモデルが広く普及したとは言えない。これは、一つの理由として、上記のモデルが、

- 資産の収益率の同次分布を推定することが難しい
- 目的関数／制約式が、多重積分で表現される
- 一般に凸計画問題として定式化されない

という性質をもつため、一般的な形で実用的な規模の問題を解くことが困難と考えられてきたためである。また、この問題の解法として上限を最小化するアプローチが取られてきた。その結果、safety first モデルが、平均・分散アプローチの枠内で取り扱われてきたという点も挙げることが出来る。しかしながら、safety first モデルは本来、平均・分散モデルとは異なるモデルであり、その特長を活かした解法が必要なはずである。

本研究においては、ファクター構造を導入したモデルを提案し、数値実験を行なうことで従来の手法との比較を行なう。

2. safety first モデル

2.1 定式化

本研究では、以下の Roy のモデルを対象とする。このモデルは、投資家の設定した収益率（閾値）を下回る確率をリスクとみなし、可能なポートフォリオの中で、これが最小となるようなものを最適な投資とするものである。すなわち、

$$Q(\varphi): \left| \begin{array}{ll} \text{minimize} & \Pr\{\sum_{j=1}^{n} R_j x_j \le \varphi\} \\ \text{subject to} & x \in X \end{array} \right. \tag{2.1}$$

と表現される。ただし、

n : 資産の数
R_j : 第 j 証券の収益率を表す確率変数
x_j : 第 j 証券への投資比率
φ : 閾値
$\Pr\{A\}$: 事象 A の起こる確率
X : 投資比率に関する制約

とする。また、閾値について以下の仮定をおく。

仮定1
ポートフォリオの収益率の期待値 $\mu = \sum_{j=1}^{n} R_j x_j$ とすると、μ は φ より大きい。

問題 $Q(\varphi)$ は、目的関数が陽に求まったとしても、一般には、非凸計画問題となる。従って、資産数が増加した場合、直接解くことは事実上不可能になる。よって、何らかの仮定に基づいた近似解法を行なう必要がある。従来の手法としては、以下のものがある。

- 上限最小化
  Chevyschev の不等式に基づいて、問題 $Q(\varphi)$ の目的関数の上限を $\mathrm{var}(\sum_{j=1}^{n} R_j x_j)/(E[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j] - \varphi)^2$ で与え、これを最小化する。
  収益率がすべて正規分布ならば、この上限最小化は、もとの問題 $Q(\varphi)$ と等価であるが、分布が正規分布からずれて行くにつれ、誤差が大きくなる。
- 整数計画問題として定式化
  ヒストリカルデータを直接使う場合、シナリオを用いる場合などは、収益率の分布が離散的に与えられる。この場合、適当な整数変数を導入することにより、問題 $Q(\varphi)$ と等価な整数計画問題をつくることができる。
  しかしながら、この方法もデータの個数が増加すると、簡単には解くことができない。

2.2 ファクター構造の導入

各資産の収益率を、以下のように、共通のファクター F と各資産固有の部分 ϵ_j に分解する。

$$R_j = \alpha_j + \beta_j F + \epsilon_j, \quad j = 1, \ldots, n \tag{2.2}$$

さらに、(2.2) の F と ϵ_j $(j=1,\ldots,n)$ について、以下のような仮定をおく。

仮定 2

F と ϵ_j $(j=1,\ldots,n)$ は、互いに、独立である。また、ϵ_j $(j=1,\ldots,n)$ は、平均 0、分散 σ_j^2 の正規分布に従う。

このとき、ポートフォリオの収益率は、

$$\sum_{j=1}^{n} R_j x_j = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j + \sum_{j=1}^{n}\beta_j x_j F + \sum_{j=1}^{n}\epsilon_j x_j \tag{2.3}$$

である。仮定 2 より、(2.4) の右辺の第 3 項は、平均 0、分散 $\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 x_j^2$ の正規分布に従う。$\eta=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j$、$\xi=\sum_{j=1}^{n}\beta_j x_j$、$\Psi=\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j x_j$ とおくと、(2.4) は、

$$\sum_{j=1}^{n} R_j x_j = \eta + \xi F + \Psi \tag{2.4}$$

と表現することが出来る。ここで、Ψ は、x によって変化するような確率変数であるが、$v=\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 x_j^2$ を固定することによって、分布が固定される。すなわち、v を固定すると、本来 n 個の確率変数を同時に取り扱わねばならなかったものが、高々二つの確率変数を考慮すればよいことになる。すなわち、v が与えられたもとでは、以下の問題を解けばよい。

$$Q_F(\varphi;v):\left|\begin{array}{ll} \text{minimize} & \Pr\{\eta+\xi F+\Psi\le\varphi\} \\ \text{subject to} & \sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 x_j^2 = v \\ & \eta=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j \\ & \xi=\sum_{j=1}^{n}\beta_j x_j \\ & x\in X \end{array}\right. \tag{2.5}$$

ついで、v を一定区間で動かしつつ、$Q_F(\varphi;v)$ を解いていけば、$Q(\varphi)$ の最適解を得ることができる。

問題 $Q_F(\varphi;v)$ については、いくつかの方法を想定することが出来る。F および、Ψ の分布関数を陽に求めた後、解析的に解くことも不可能ではないが、例えば以下のようなより heuristic な方法を用いることも可能である。

1. F、ϵ_j $(j=1,\ldots,n)$ の分布関数を推定する。
2. 求めた分布関数に従うような乱数を発生させ、サンプルデータセット (F_t,Ψ_t), $t=1,\ldots,T$ を得る。
3. $Q_F(\varphi;v)$ の目的関数を、$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\delta(\eta+\xi F_t+\Psi_t \mid \varphi)$ で置き換える。ただし、$\delta(\zeta\mid\varphi)=1\ (0)$, if $\zeta\le\varphi$ (otherwise) とする。

これを、F と Ψ を軸とするような $F-\Psi$ 平面を考えると、超平面 $\eta+\xi F+\Psi=\varphi$ で、二つの半空間に分けた時に "下側" に来る実現値の数を最小にするような超平面を求めることになる (Fig.1 参照)。

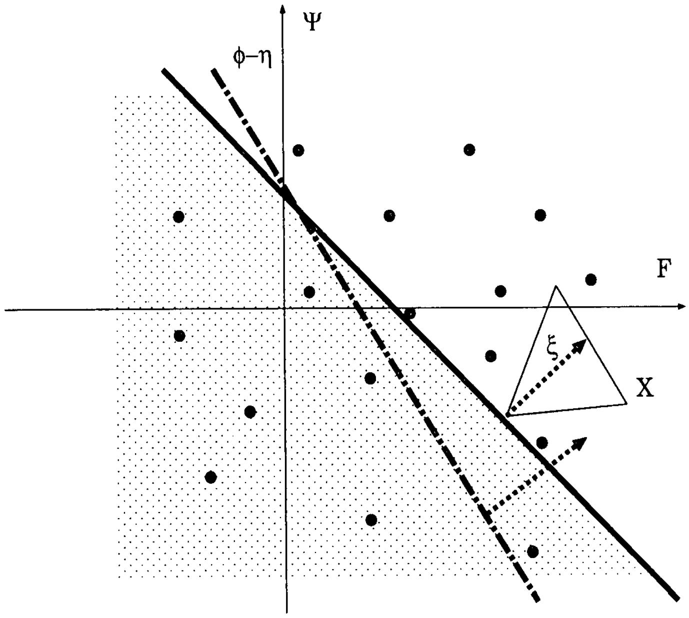

Figure 2.1: $F-\Psi$ 平面

3. 数値実験

発表当日にあたっては、上記のモデルに関して、実際のデータを用いて数値実験を行なった結果を発表する予定である。

References

[1] A. Charnes and W. W. Cooper, "Chance Constrained Programming", *Management Science*, vol 6, p73–79, 1959

[2] A. D. Roy, "Safety-First and the Holding of Assets", *Econometrics*, vol 20, p1449–1468, 1952

[3] H. Konno, P. T. Thack and H. Tuy, *Optimization on Low Rank Nonconvex Structures*, Kluwer Academic, 1996 (to appear)