1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

AHP を用いた最適ポートフォリオモデル

01505910 慶應義塾大学 *枇々木 規雄 HIBIKI Norio
01306330 MTEC 高山 俊則 TAKAYAMA Toshinori

1 はじめに

投資意思決定問題に対するアプローチとして、平均・分散モデルや下方リスクモデルなどがある。しかし、これらのアプローチには以下のような問題点がある。

1. 投資家のリスク回避度の計測が困難である。
2. 投資意思決定に参加する個人の意思を適切に尊重することが難しい。
3. 質的情報を反映することができない。

これらの問題点に対して、Saaty et al. [4], Khaksari et al. [3], 開澤ら [2] は、AHP(Analytical Hierarchy Process : 階層化意思決定法) を用いたポートフォリオ構築法を提案している。これらは、AHP によって得られる代替案 (投資対象) のウェイトを投資比率として求める手法である。しかし、これらの手法は、投資家の意思 (価値観) を反映する一対比較行列に対する最大固有ベクトルを使って投資比率を求めていく手順をとるので、投資比率に対して実務上の諸制約を組み込むことができない。資産配分においては、例えば、我が国における企業年金運用の 5:3:3:2 規制や、ポートフォリオの組み替えコストを抑えるための売買回転率制約等も課されるのが現状である。

そこで、本研究では、AHP の持つ長所を取り込みながら、これらの諸制約を組み込むことができる数理計画モデルの構築を試みる。本研究によって得られる数理計画モデルは、平均・分散モデルや下方リスクモデルなどの数理計画モデルと組み合わせることによって、より投資家のニーズに合ったモデル化が可能になる。

2 AHP によるポートフォリオ構築法

2.1 投資比率の決定方法

「投資対象」への投資比率を決めるための「評価基準」を定め、その意思決定の階層構造を表現する。

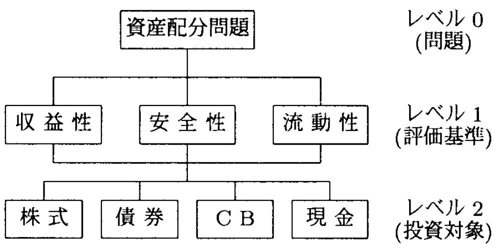

図 1 : 投資比率の決定方法 : 階層図の例

【記号の説明】

$N+1$: レベル数

M_i : レベル i における評価基準の数, $M_0=1$。

M_N : レベル N における代替案 (投資対象) の数。

$P_i^{(j)}$: レベル $(i-1)$ の評価基準 j に対するレベル i の評価基準の一対比較行列。

$\boldsymbol{W}_i^{(j)}$: $P_i^{(j)}$ に対する最大固有ベクトル。

$P_i^{(j)}\boldsymbol{W}_i^{(j)} = \lambda_{max,i}^{(j)}\boldsymbol{W}_i^{(j)}$, $\lambda_{max,i}^{(j)}$: 最大固有値

Y_i : レベル $(i-1)$ の評価基準に対するレベル i における最大固有ベクトルを横に並べた行列,

$Y_i = \left[\boldsymbol{W}_i^{(1)},\ldots,\boldsymbol{W}_i^{(M_{i-1})}\right]$

$\boldsymbol{Z}_i$: レベル i の評価基準に対するウェイトベクトル。

$Z_0=1$。$\boldsymbol{Z}_1 = Y_1 = \boldsymbol{W}_1^{(1)}$。

$\boldsymbol{Z}_N$: 代替案 (投資対象) に対するウェイトベクトル。

AHP を用いて、次のように投資比率 $\boldsymbol{Z}_N$ を求める。

$$\boldsymbol{Z}_N = Y_N\boldsymbol{Z}_{N-1} = \cdots = Y_N Y_{N-1}\cdots Y_2 Y_1 \quad (1)$$

Y_i は、$\boldsymbol{W}_i^{(j)}$ によって記述され、その $\boldsymbol{W}_i^{(j)}$ は一対比較行列 $P_i^{(j)}$ により求められる。AHP では、一対比較行列が決まると、投資比率 $\boldsymbol{Z}_N$ が決定するため、このままでは投資比率に諸制約を組み込むことは難しい。

2.2 AHP における固有値問題と数理計画モデル

最大固有値および最大固有ベクトルを求める問題は以下の数理計画問題 **MPEV** として定式化できる。

【**MPEV**】

$$\max \quad \lambda_{max,i}^{(j)} \quad (2)$$

$$\text{s.t.} \quad P_i^{(j)}\boldsymbol{W}_i^{(j)} = \lambda_{max,i}^{(j)}\boldsymbol{W}_i^{(j)} \quad (3)$$

$$\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{W}_i^{(j)} = 1 \quad (4)$$

この問題は、$\lambda_{max,i}^{(j)}$ と $\boldsymbol{W}_i^{(j)}$ が決定変数となる非線形計画問題である。$P_i^{(j)}$ は非負行列なので、$\boldsymbol{W}_i^{(j)}$ は非負ベクトルになる。そこで、問題 **MPEV** は(3),(4) 式と$\boldsymbol{W}_i^{(j)}$ の非負制約式のみから記述できる。

2.3 モデル構築の考え方

投資比率 $\boldsymbol{Z}_N$ に制約を加えることは、結果として投資家の情報 (意思や価値観) を表す一対比較行列に制約を加えることになる。そこで、AHP の長所を生かすために、投資比率制約を加えても、一対比較行列 $P_i^{(j)}$ をなるべく変更しないモデル化を考える。

【基本モデル】[1]

$$\min \quad \mathbf{dev}\left[G\left(P_i^{(j)}, Q_i^{(j)}\right), G\left(Q_i^{(j)}, P_i^{(j)}\right)\right], \quad (\{i\},\{j\}) \quad (5)$$

$$\text{s.t.} \quad Q_i^{(j)}\boldsymbol{w}_i^{(j)} = \gamma_{max,i}^{(j)}\boldsymbol{w}_i^{(j)},\ (\{i\},\ \{j\}) \quad (6)$$

$$z_i = X_i z_{i-1},\ (\{i\}), \quad (7)$$

$$\text{ただし、} z_0 = 1, X_i = \left[\boldsymbol{w}_i^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{w}_i^{(M_{i-1})}\right]$$

$$\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{w}_i^{(j)} = 1,\ (\{i\},\ \{j\}) \quad (8)$$

$$\boldsymbol{w}_i^{(j)} \geq \mathbf{o},\ (\{i\},\ \{j\}) \quad (9)$$

$$z_N \in \boldsymbol{F} \quad (10)$$

$$\frac{1}{H} \leq Q_{i,(a,b)}^{(j)} \leq H,\ (\{i\},\ \{j\},\ \{a\},\ \{b\}) \quad (11)$$

$$\frac{\gamma_{max,i}^{(j)} - M_i}{M_i - 1} \leq CI^{max},\ (\{i\},\{j\}) \quad (12)$$

$\mathbf{dev}[\cdot,\cdot]$ は、2つのパラメータの差異を表す一般的な関数[2]、$\boldsymbol{F}$ は投資比率 z_N の諸制約空間を表す。$Q_i^{(j)}$, $\boldsymbol{w}_i^{(j)}$. $\gamma_{max,i}^{(j)}$, z_i, X_i は $P_i^{(j)}$, $\boldsymbol{W}_i^{(j)}$. $\lambda_{max,i}^{(j)}$, $\boldsymbol{Z}_i$, Y_i に相当する決定変数である。$Q_{i,(a,b)}^{(j)}$ は、$Q_i^{(j)}$ の右上三角部分の要素を表す。$G(P,Q)$ は $P_{a,b}/Q_{a,b}$ を各要素とする行列を表す。CI^{max} は整合度の許容上限を表す。基本モデルは非凸な非線形制約式を含むので、全域的最適解を求めるには解きにくい問題である。

3 代替的なアプローチ

3.1 代替モデル 1

一対比較行列の構造は最大固有ベクトルに表現されていると考えて、最大固有ベクトル $\boldsymbol{W}_i^{(j)}$ をなるべく変更しないモデル化を考える。

$$\min \quad \mathbf{dev}\left[\boldsymbol{W}_i^{(j)}, \boldsymbol{w}_i^{(j)}\right],\ (\{i\},\ \{j\}) \quad (13)$$

s.t. (7)～(10) 式

$Q_i^{(j)}$, $\gamma_{max,i}^{(j)}$ が問題から取り除かれたので、基本モデルに比べて解きやすくなっているが、非線形制約式が残るので、まだ解きにくい構造の問題である。

3.2 代替モデル 2

非線形制約式を取り除くために、評価基準に対するウェイトベクトル $\boldsymbol{Z}_i$ をなるべく変更しないような2種類の目標を持つモデル化を考える[3]。

$$\min \quad \mathbf{dev}\left[\boldsymbol{Z}_i, z_i\right],\ (i = 1, \ldots, N-1) \quad (14)$$

$$\min \quad \mathbf{dev}\left[z_i, Y_i z_{i-1}\right],\ (i = 2, \ldots, N) \quad (15)$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{e}^T z_i = 1, (i = 1, \ldots, N) \quad (16)$$

$$z_i \geq \mathbf{o}, (i = 1, \ldots, N-1) \quad (17)$$

$$z_N \in \boldsymbol{F} \quad (18)$$

3.3 代替モデル 3

投資家の情報は投資ウェイト $\boldsymbol{Z}_N$ に反映されていると考え、それをなるべく変更しないモデル化を考える。

$$\min \quad \mathbf{dev}\left[\boldsymbol{Z}_N, z_N\right] \quad (19)$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{e}^T z_N = 1 \quad (20)$$

$$z_N \in \boldsymbol{F} \quad (21)$$

4 数値例(詳しい結果は当日示す)

$N = 2$(評価基準は1レベル), $M_1 = 6$(評価基準数は6), $M_2 = 6$(投資対象数は6) の数値例を示す。投資比率に関する諸制約として、上限制約と回転制約を課す。

(1) 上限制約 $z_N \leq \boldsymbol{U}$

(2) 回転制約 $\boldsymbol{e}^T|z_N - \boldsymbol{x}| \leq V$

$\boldsymbol{U}$ は投資比率の上限ベクトル、V は売買回転率の上限値、$\boldsymbol{x}$ は現在のポートフォリオ・ベクトルを表す。

5 グループによる投資意思決定への適用

資産配分問題などの重要な投資判断は複数の意思決定者(グループ)によって行われる場合が少なくない(「グループAHP」と呼ばれる)。グループAHPを用いた投資意思決定モデルについて2通りの方法を議論する。

(1) 一対比較(行列)値の幾何平均を用いる方法

(2) 個人の意思をできるだけ反映させる方法

6 おわりに

本研究では、AHPによるポートフォリオ選択問題に対し、従来の方法では考慮することが難しかった制約条件を組み込むことができる数理計画モデルを示した。AHPの構造をそのまま保つことができる基本モデルと、それを代替する3つの簡略モデルを提案した。さらに、各モデルに対する簡単な数値例を示した。本研究で示したモデルは、ポートフォリオ選択問題だけでなく、代替案に制約が課されるタイプの問題に対しても、同様に適用可能である。

参考文献

[1] 枇々木 規雄：目標ベクトル法で想定する効用関数に関する考察, 日本経営工学会誌, Vol.46, No.6(1995).

[2] 開澤 栄相, 鈴木 政博：Global Asset Allocation by AHP, 日本OR学会 1995年度秋季大会.

[3] S.R.Khaksari, R.Kamath and R. Grieves : A New Approach to Determining Optimum Portfolio Mix, *J.P.M.*, Vol.15, No. 3(1989), 43–49.

[4] T.L.Saaty, P.C.Rogers and R.Pell : Portfolio Selection through Hierarchies, *J.P.M.*, (1980), 16–21.

[1] $\{i\} \equiv \{i = 1, \ldots, N\}$, $\{j\} \equiv \{j = 1, \ldots, M_{i-1}\}$, $\{a\} \equiv \{a = 1, \ldots, M_i - 1\}$, $\{b\} \equiv \{b = a+1, \ldots, M_i\}$.

[2] ここでは、差異を表す関数 $\mathbf{dev}[\cdot,\cdot]$ として、絶対差異の p 次距離関数もしくはオープンL字関数 [1] を設定する。

[3] $z_i = Y_i z_{i-1}$ の制約式を設定すると、実行不可能になる可能性があるため、(15)式のような目標として設定する。