1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

AHP における Strongly Regular 計画

02991410 日本大学 *王 克義 Keyi WANG
01300450 日本大学 高橋磐郎 Iwaro TAKAHASHI
01011500 日本大学 大澤慶吉 Keikichi OSAWA

1 Introduction

AHP の基本は一対比較行列から、全体のウェイトを推定するという点にあるが, 対象数が n のとき一対比較の総数は$_n\mathrm{C}_2 = n(n-1)/2$ となって二乗のオーダで増大する。n が大きいとき全体の対を揃えるには、コストが大きい。そこで対全体でなく、その一部のみを比較したデータに基づいてウェイトの推定を行うという計画を考える。このような推定法は不完全情報の AHP として、Harker-Takeda 法 (HTM)、Two-stage 法 (TSM) あるいは対数最小二乗法 (LLS) 等が確立されているが、このときどのような対を選んだら、少ないデータから精度の高い推定が得られるかという計画の問題が重要となる。

本研究はこれに対して SR(strongly regular) 計画、を提案し、それが、同一の対象数 n、一対比較数 m の中で他のいかなる計画よりもよい精度を与えることをシミュレーションしで示した。SR 計画は SR グラフに基づくものであるが、SR グラフには強いパラメター制約があるため、n,m の値を幅広く選ぶことができない。そこで SR グラフの条件を緩めた準 SR グラフを提案し、n,m の値の範囲を飛躍的に拡大した。また準 SR グラフに基づく準 SR 計画も他のランダムな計画にくらべてはるかによい精度を与えることをシミュレーションによって示した。SR グラフに対してはその隣接行列の生成多元環を分析することによって LLS における推定基準誤差を与える理論公式を作った。いくつかの SR と準 SR グラフの構成法を紹介し、様々な n,m に対して、SR グラフと準 SR グラフを表で紹介する。

2 Strongly regular graph

ここにグラフというのは無向、ループがない、単純グラフをいう。完全グラフとはどの二点も隣接のグラフをいう。空グラフとは辺のないグラフをいう。どの点も同一連結度 d のとき regular グラフという。もし $\mathbf{N}$ が regular グラフの隣接行列なら、つぎの (2.1) を満たす。

$$\mathbf{NJ} = \mathbf{JN} = d\mathbf{J} \quad (\mathbf{J}^2 = n\mathbf{J}) \qquad (2.1)$$

ここでは、$\mathbf{I}$ が単位行列、$\mathbf{J}$ が全部の成分が 1 の行列を表す。Strongly regular グラフというのはつぎの条件を満たす regular グラフをいう.

1. もし点 p と点 q が隣接なら、p と q とに同時に隣接する点の数がλ (λ は p、q の選択に無関係)。
2. 点 p と点 q が隣接しないなら、 p と q とに同時に隣接する点の数が μ (μは p,q の選択に無関係)。

言い換えると、Strongly regular グラフというのは点 p と隣接する点の数が d、点 p と隣接する点には長さ 2 のパスがλ個があり、点 p と隣接しない点には長さ 2 のパスがμ個がある。この n 点の SR グラフを $\mathbf{G}(n,d,\lambda,\mu)$ で記入する。もし $\mathbf{G}(n,d,\lambda,\mu)$ が SR グラフなら、$\mathbf{G}$ の補グラフ $\mathbf{G}(n,\bar{d},\bar{\lambda},\bar{\mu})$ も SR グラフで、かつ

$$\bar{d} = n-1-d, \quad \bar{\lambda} = n-2d+\mu-2, \quad \bar{\mu} = n-2d+\lambda \qquad (2.2)$$

もし $\mathbf{N}$ がグラフ $\mathbf{G}$ の隣接行列なら、つぎの条件は $\mathbf{G}$ が SR グラフの必要十分条件である。

$$\mathbf{N}^2 = d\mathbf{I} + \lambda\mathbf{N} + \mu(\mathbf{J}-\mathbf{I}-\mathbf{N}) \qquad (2.3)$$

3 SR 計画の LLS 分析

AHP に対して分析する場合、対数最小二乗法がよく使われる。もし a_{ij}が対象 i と対象 j の比較値なら、LLS のモデルはつぎの (3.1) のようになる。

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}e_{ij}, \qquad i,j = 1,\cdots,n \quad (i<j) \qquad (3.1)$$

(ここでは $a_{ii} = 1$)。式の両辺対数をとると、つぎのようになる。

$$\log a_{ij} = \log w_i - \log w_j + \log e_{ij}, \quad i,j = 1,\cdots,n \quad (i<j) \qquad (3.2)$$

$\bar{e}_{ij} = \log e_{ij}$, $\overline{w}_{ij} = \log w_{ij}$ として、期待値 $E(\bar{e}_{ij}) = E(\log e_{ij}) = 0$ 、$V(e_{ij}) = \sigma^2$、$\bar{e}_{ij}$は互いに独立と仮定する。$w_1w_2\ldots w_n = 1$ とし、

$$\overline{w}_1 + \overline{w}_2 + \cdots + \overline{w}_n = 0 \qquad (3.3)$$

になる。$\overline{w}_i$の最小二乗法推定$\widehat{\overline{w}}_i$の分散はつぎの式になる。

$$V(\widehat{\overline{w}}_i) = M^{ii}\sigma^2 \quad (i = 1,\cdots,n) \quad (3.4)$$

(ここで M^{ii}は正規方程式の係数行列 (情報行列と呼ぶ) $\mathbf{M}$ の逆行列 $\mathbf{M}^{-1}$の対角成分である。

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

Theorem 1 M を *SR* グラフ $G(n,d,\lambda,\mu)$ の *LLS* 分析の情報行列とすると、

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= d\mathbf{I}+\mathbf{J}-\mathbf{N} \qquad (3.5)\\ \mathbf{M}^{-1} &= \alpha\mathbf{I}+\beta\mathbf{J}+\gamma\mathbf{N}\\ \alpha &= \frac{d+\mu-\lambda}{d(d+\mu-\lambda)+(\mu-d)}\\ \beta &= \frac{-2d+\lambda}{n\{d(d+\mu-\lambda)+\mu-d\}}\\ \gamma &= \frac{1}{d(d+\mu-\lambda)+\mu-d} \qquad (3.6)\end{aligned}$$

これらを整理すると、次の定理が $V(\widehat{\overline{w}}_i)$ の値を与える。

Theorem 2

$$V(\widehat{\overline{w}}_i)=\frac{(n-2)d-(n-1)\lambda+n\mu}{n\,[d(d-1)-d\lambda+(d+1)\mu]}\sigma^2 \qquad (3.7)$$

そして、$V(\widehat{\overline{w}}_i)$ は $i(=1,\ldots,n)$ に無関係に定まることがわかる。

4 準SR計画

SRグラフ $\mathbf{G}(n,d,\lambda,\mu)$ に対してパラメーターはつぎの関係がある、

$$d(d-\lambda-1)=(n-d-1)\mu \qquad (4.1)$$

また式

$$\frac{1}{2}\left(n-1\pm\frac{(n-1)(\mu-\lambda)-2d}{\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4(d-\mu)}}\right) \qquad (4.2)$$

の値は整数でなければならない。この二つ条件をみると、SRグラフにはかなり強い制約があって、実用面では不便である。そこで、準SRグラフ（準SR計画）の概念を導入する。式(2.3)を拡張して regular グラフの隣接行列Nに対して、$\mathbf{N}^{r+1}$を $\mathbf{I},\mathbf{N},\cdots,\mathbf{N}^r$ と J の線形結合で表せるとき、このようなrの最小値を N の order と呼ぶ。order が1の regular グラフはSRグラフ、$r\geq 2$ のとき、準SRグラフと呼ぶ。

5 シミュレーション

この節ではシミュレーションによって、SR、準SR計画が同一の n,m ほかのランダム計画よりも優れていることを示す。まず、

$$V_{\max}=\max\{V(\widehat{\overline{w}}_i)|\ i=1,\ldots,n\} \qquad (5.1)$$

とし、それから、一様乱数で $w_1+\ldots+w_n=1$ を満たす $w_1,\ldots,w_n$を発生する, つぎの過程のようにする。

(a) 対 (i,j) に対して、$\bar{e}_{ij}=\log e_{ij}$ （$\mathrm{E}[\bar{e}_{ij}]=0$, $V[\bar{e}_{ij}]=\sigma^2$を満たす）を正規乱数で発生し、

$$a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}e_{ij}, \qquad a_{ji}=1/a_{ij}$$

を計算する。

(b) 比較行列をつくる、隣接行列 $\mathbf{N}=(N_{ij})$ の (i,j) 成分が1なら、比較行列の (i,j) 成分を $a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}e_{ij}$ をとり、$N_{ij}=0$ なら、比較行列の (i,j) 成分が欠落とする。そして、HTM と TSM で最大固有値と固有ベクトル $(\widehat{w}_1,\widehat{w}_2,\ldots,\widehat{w}_n)$ を計算する。

(c)$\overline{w}_i=\log w_i, \widehat{\overline{w}}_i=\log\widehat{w}_i (i=1,\ldots n)$ を計算し、

$$\widehat{V}_{\max}=\max\{(\widehat{\overline{w}}_i-\overline{w}_i)^2|i=1,\ldots,n\} \qquad (5.2)$$

とする。

(a),(b),(c) を繰り替えし、$\widehat{V}_{\max}$の平均$\overline{\widehat{V}}_{\max}$値で計画の良さを測る（LLSでは推定の誤差分散 $V(\widehat{\overline{w}}_i)$ が a_{ij}の値に無関係に定まる）シミュレーションの結果つぎのことが示された。SR計画と準SR計画が一般の場合より優れる、とくにLLSに対して、例外なしに、SR計画と準SR計画が一般の場合よりよい結果が得られた。固有値方法の場合、少し例外があるが、ただし、その差がかなり小さいので、無視できる。尚、例外なし、TSM は HTM よりよい結果が得られた。

6 SRと準SRグラフの構成

SRグラフの従来の構成を調べ上げ、我々自身もSR、準SRグラフの新たな構成法開発し、それらによって、各 $n=4\sim 20$ に対して様々な m に関する、SR、準SRの構成法と、その特徴をあらわすパラメーター、とくに LLS における推定標準誤差をリストアップした。$n=4\sim 8$ に対してはこれらの実際の隣接行列も付加した。この表は AHP に対する実際的な計画を与えるだけでなく、理論的にも多くの情報をもっている。たとえば比較対数 m のかなり少ない不完全情報の計画を用いても、対全体比較する完全情報と比べての精度はそれほど悪くならないこととか、またSRは同一 n,m に準SRよりもよい精度を与えることが示されている。

参考文献

[1] T.L.Saay, *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw Hill, New York(1980)

[2] P.J.Cameeron and J.H.Van Lint,*Graph Theory Coding Theory and Block Designs* Cambridge University Press, London(1975)

[3] P.T.Harker,Incomplete Pairwise Comparisons in the Analytic Hierarchy Process, *Mathematical Modelling*,Vol.9(1987),838-848.

[4] E.Takeda and P.L.Yu,Eliciting the Relative Weights from Incomplete Reciprocal Matrices,Preprints of Int.Sympo.on the AHP,Tianjin Univ.,1988,192-200.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.