

障害物のある領域における最短路の一計算法

A Computational Method for the Shortest Path in the Region with Obstacles

*中央大学 湯澤秀人 YUZAWA Hideto

00000030 中央大学 伊理正夫 IRI Masao

1. はじめに 障害物がある領域において最短経路を求めることは、ロボット工学等において基礎的な問題であり、やや恣意的なモデルと ad hoc な計算法によるアプローチ [1,2] や計算幾何学的方法 [3,4] 等が数多く提案されている。また、単に障害物を避けるというだけでよいとするモデルの他に、障害物から“なるべく離れて”通ることを重要視するもの、等々、各種の定式化が考えられているが、ここでは極く素朴に—そして一般的に—障害物の存在のために一様でない“通り難さ”が対象領域の各点に定義されていて、その通り難さの経路に沿っての“積分”が最小になるような経路を求めるという形に問題を定式化してみる。この問題は、単位長当たりの工事費が知られているときに、総工費最小で道路を引く計画問題であるとも見做せる。

ここでは一応等方的な問題を扱うが、言うまでもなく、このような問題は、より一般的には非等方的な Riemann 計量 (あるいは更に一般的には Minkowski 計量) の与えられた空間における測地線を求める問題 [5,6] になるが、局所最適解ならともかく、大域的な最適解を定めようとする、組合せ的な困難が生じることも明らかである。そのような困難に対して、数学的な接近法は、無効とは言わないまでも、現実の具体的な問題を扱うには少々力不足であろう。また、過度に“算法の複雑度”に拘泥する理論計算幾何学的接近法も、そろそろ卒業してよい時代になっているのではないか。

そこで、ここでは、連続的な領域を密なネットワークで“近似”して、そのネットワークに対して Dijkstra 法を適用することによって、大域的な最短路の概観をつかみ、それから出発して、“測地線”の微分方程式を数値的に解くという方法を試みてみた。このように、以下で報告する実験は極く素朴な方法に基づくものにはあるが、このような方法が現在の計算機環境の許では十分に実用的でありかつ多様な応用に柔軟に対応できることをこの実験は示しているといえよう。

2. 問題の定式化 考えている領域 Ω (とりあえず 2 次元、有界開集合とする) の各点 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ に、その点付近の“通り難さ” $S(\mathbf{r}) (> 0)$ (一階連続微分可能であるとする) が定義されている。 $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$

から $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1)$ への道はパラメタ t により $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) (t \in [0, a])$ とパラメタ表現する。($x(t), y(t)$ は 2 階微分可能とする。) このとき、 $x(0) = x_0, y(0) = y_0, x(a) = x_1, y(a) = y_1$ の条件の下で

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} S(\mathbf{r}) |d\mathbf{r}| = \int_0^a S(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt \quad (1)$$

を表すような $x(t), y(t)$ を求めることが問題である。

3. 測地線の方程式 この変分問題の Euler の微分方程式を求めると

$$\begin{aligned} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)(S_x \dot{y} - S_y \dot{x}) - S(\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}) &= 0, \\ (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)(S_y \dot{x} - S_x \dot{y}) - S(\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

となるが、これらは従属であるので、さらに

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 0 \quad (3)$$

という条件を課せば、“測地線の方程式”

$$\ddot{x} = \left(\frac{S_x}{S} \dot{y} - \frac{S_y}{S} \dot{x} \right) \dot{y}, \quad \ddot{y} = \left(\frac{S_y}{S} \dot{x} - \frac{S_x}{S} \dot{y} \right) \dot{x} \quad (4)$$

が得られる [7]。

4. ネットワーク近似 領域 Ω を微細な正方格子点 N で覆う ($\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1 \in N$ であるとする)。 N の格子点のうち、比較的近い対 $(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')$ を長さ

$$S((\mathbf{r}' + \mathbf{r}'')/2) \cdot |\mathbf{r}' - \mathbf{r}''| \quad (5)$$

の辺で結ぶ。計算量の点からみて、あまり遠くの対まで選ぶのは実用的ではないが、格子の隣接点だけでは

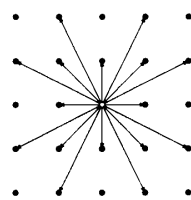


図 1

経路の角度の自由度が少なくなるので近似度が下がる。われわれの実験では、 (x, y) -座標の差が 2 単位以内の点対を辺で結んだ (合計 16 方向が選べる; 図 1 参照)。

5. 計算法 上記のネットワークに \mathbf{r}_0 を出発点とする Dijkstra 法を適用して、“波面”が \mathbf{r}_1 に達したところで近似的な最短路が求まる。次にその情報に基づいて、 \mathbf{r}_0 から出発して、初期方向を調節しながら測地線の微分方程式を解き、測地線が \mathbf{r}_1 を通るようにすれば (shooting method)、 \mathbf{r}_0 から \mathbf{r}_1 への最短経路が求まるわけである。

6. 計算実験例 単位正方形にいくつかの障害物を $\mathbf{r}_\alpha (\alpha = 1, \dots, M)$ に置く。このとき、

$$S(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^M \frac{c_{\alpha}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}|} + 1.0 \quad (6)$$

とか、

$$S(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^M \frac{c_{\alpha}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}| - D_{\alpha}} + 1.0$$

($D_{\alpha} > 0; |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}| \leq D_{\alpha}$ のとき $S(\mathbf{r}) = \infty$) (7)

とかいう $S(\mathbf{r})$ を取るのがよからう。ここでは式 (6) を用いた ($M = 5, c_{\alpha} = 0.1$)。 N としては、単位正方形を 100×100 に分割した正方格子点を取ってみた。計算実験例を図 2 (a), (b) に示す。(a) は Dijkstra 法から得られた“波面”と近似測地線、(b) は shooting method により得られた大域的 shortest (太線) の他に局所的な shortest のいくつかも示してある。

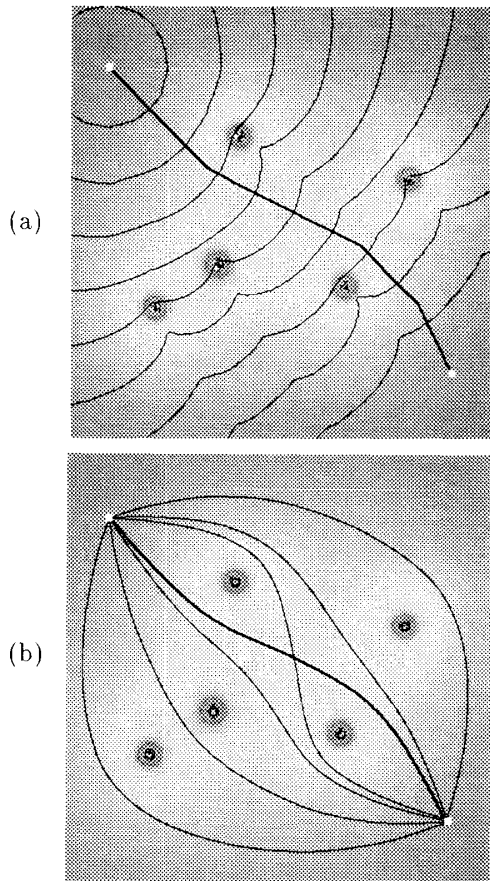


図 2

7. 吟味と今後の課題 この実験例は、微分幾何学でいう共形計量 (等方計量) の例であるが、これを非等方的な計量に拡張することは容易である [5,6]。近似ネットワーク上で Dijkstra 法を走らせることが古典物理学 (解析力学、光学) における Huygens の原理、Hamilton-Jacobi の方程式の解等の、そして、測地線の方程式の数値解が eikonal 関数の計算等の離散版になっていることも明らかであろう [5]。また、ここで

のネットワーク近似は [8,9] 等で論じられている密なネットワークの連続体近似との関係も深く、連続体そのものを有限要素近似して近似測地線を求めるという方法の可能性もある。さらにネットワーク近似において大域的最適経路の候補を求める際の誤差の評価についても数学的に解析することが必要である (実用上どのくらい意義があるかは別として)。微分方程式の数値解法としては、精度の保証された方法も考えるべきであるし、また 2 点境界値問題を shooting method によらず直接扱うことも検討に値しよう。パラメタ t に課した条件 (3) は、単に「表式が簡単になるから」という理由だけでここでは採用したが、本来ならば微分幾何学の伝統に従って

$$S^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 1 \quad (8)$$

とすべきであり、その方が t を離散化して微分方程式を数値的に解く際にも有利であるはずである。Voronoi 図を用いたモデルとわれわれのモデルとの関係も更に深く調べる必要がある。

8. 謝辞 本研究を行うに当り、数々の貴重な御教示を賜った本学理工学部情報工学科 鈴木寿 先生に感謝致します。

参考文献

- [1] 鈴木 寿, 有本 卓: 時変環境における点状の移動ロボットのペイント手続きを利用した再帰的軌道計画法. *日本ロボット学会誌*, 8 巻 5 号 (1990), pp. 513-522.
- [2] O. KHATIB: Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots. *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 5, No. 1 (1987), pp. 90-98.
- [3] D. T. LEE and F. P. PREPARATA: Euclidean shortest paths in the presence of rectilinear barriers. *Networks*, Vol. 14 (1984), pp. 393-410.
- [4] C. O'DUNLAING, M. SHARIR and C. K. YAP: Retraction: A new approach to motion planning. *The 15th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 1983.
- [5] J. A. SCHOUTEN: *Tensor Analysis for Physicists*. Clarendon Press, Oxford, 1951.
- [6] J. A. SCHOUTEN: *Ricci - Calculus*. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1954.
- [7] L. E. ELSGOLC: *Calculus of Variations*. Pergamon Press, London-Paris-Frankfurt, 1961.
- [8] M. IRI: Theory of flows in continua as approximation to flows in networks. A. Prékopa (ed.): *Survey of Mathematical Programming*, North-Holland, Vol. 20 (1982), pp. 178-217.
- [9] A. TAGUCHI and M. IRI: Continuum approximation to dense networks and its application to the analysis of urban road networks. *Mathematical Programming Study*, Vol. 20 (1982), pp. 178-217.