容量付きネットワークのスリム化の計算複雑さについて
Complexity of Slimming of a Capacitated Network

02701530　中央大学　*山口　雅弘　YAMAGUCHI Masahiro
01000850　中央大学　伊理　正夫　IRI Masao

概　要

制御不能流の理論 [2, 4] における**無閉路** 2 端子ネットワークの容量を，フローの実行可能性に影響を与えることなく減少させる (容量付きネットワークの**スリム化**) という問題を [11] において論じた．これに対して，一般の (有向閉路を含む) 2 端子ネットワークの場合 "算法的困難が生じる" という主張に疑義が出された．そこで今回は，まず "一般のネットワークのスリム化" を正確に定義し直し，"スリム化の意義" を調べ，"一般の 2 端子ネットワークのスリム化の問題は NP-完全である" ことを示す．

1　諸定義

$G = (V, E, \partial^+, \partial^-)$ (V: 点集合、E: 枝集合、$\partial^+ : E \to V$、$\partial^- : E \to V$ (接続関係)) を有向グラフ，$N = (G, c, \xi)$ ($c : E \to \mathbf{R}_+$ (容量)、$\xi : E \to \mathbf{R}$ (フロー)) を (容量付き) **ネットワーク**，$N_{s,t} = (N, s, t)$ ($s \in V$ (入口)、$t \in V$ (出口)) を **2 端子ネットワーク**，$\|\xi\|_{s,t}$ を $N_{s,t}$ における s から t への ξ の総流量，$\widetilde{N} = (\widetilde{G}, \widetilde{c}, \widetilde{\xi})$ ($\widetilde{G} = (\widetilde{V}, \widetilde{E}, \widetilde{\partial}^+, \widetilde{\partial}^-)$、$\widetilde{V} = V$、$\widetilde{E} = E \cup \{e_0 \notin E\}$、$\widetilde{\partial}^+|_E = \partial^+$、$\widetilde{\partial}^-|_E = \partial^-$、$\widetilde{\partial}^+ e_0 = t$、$\widetilde{\partial}^- e_0 = s$、$\widetilde{c}|_E = c$、$\widetilde{\xi}|_E = \xi$、$\widetilde{c}(e_0) = \infty$、$\widetilde{\xi}(e_0) = \|\xi\|_{s,t}$) を $N_{s,t}$ の**拡大ネットワーク**とする．初等的な有向閉路 (2 端子ネットワークの場合は入口から出口への初等的な有向道) に沿っての単位フローの，正係数の一次結合を**制御不能流** (uncontrollable flow、単に **u-flow**) と呼ぶ [4, 5]．

2　スリム化の定義

[定義 1]　ネットワーク N の任意の枝 $e \in E$ に対して，$c(e) = \infty$ としたときの**実行可能** ($\forall e \in E : 0 \le \xi(e) \le c(e)$ を満たす) 制御不能流 ξ の中での最大可能値 $\xi(e)$ を $\check{c}(e)$ と定義する．枝容量 $c(e)$ を $\check{c}(e)$ で置き換える手続きを，枝容量 $c(e)$ の**局所最適化**という．

枝容量 $c(e)$ の局所最適化は，「ネットワーク N の $c(e)$ 以外の全ての容量を最大限利用するように $c(e)$ を定めること」と物理的に解釈できる．

[定義 2]　ネットワーク $N = (G, c, \xi)$ において $\check{c}(e)$ の値を全ての枝 $e \in E$ に関して "別々に" 算出する．ここで，$c' : E \to \mathbf{R}_+$ を

$$c'(e) = \min(c(e), \check{c}(e))$$

と定義し，全ての枝の容量 $c(e)$ を $c'(e)$ でおきかえることを N の**スリム化** (slimming) と呼び，スリム化されたネットワークを $N' = (G, \xi, c')$ で表す．

スリム化の物理的な意味は「フローの実行可能性を保存したまま余分な枝容量を削り取ること」である．

一般の (2 端子でない) ネットワーク N に関しては，スリム化はアルゴリズム的に容易に実行できる．すなわち $\check{c}(e)$ はネットワーク N から枝 e を取り除き $s = \partial^- e$、$t = \partial^+ e$ とした 2 端子ネットワーク $N_{s,t}$ における $\|\xi\|_{s,t}$ の最大値 (**最大流**) として算出できる．(一般のネットワークの場合通常のフローと u-flow の区別は無い [4]．)

3　スリム化の正当性

スリム化の定義の意義を示すために，N' の全ての実行可能 u-flow が N で実行可能で，逆もまた成立すること，そしてそれ以上の枝容量の減少は，N で実行可能な u-flow を N' で実行不可能とすることを示す．

証明: N で実行可能な u-flow ξ は $\forall e \in E$ において $0 \le \xi(e) \le \check{c}(e)$ を満たすこと，したがって N' でも実行可能であることは定義 1 より明らかである．逆に，ξ が N' で実行可能であれば，$\forall e \in E$ に関して $0 \le \xi(e) \le c'(e) \le c(e)$ が成立するので ξ は N でも実行可能である．

さらに，$\forall e \in E$ に対して，$c'(e)$ の定義 (定義 1, 2) により，$\xi(e) = c'(e)$ となるような N における実行可能フロー ξ が存在する．したがって，e の容量を $c'(e)$ より小さくすれば，そのフローは N において実行可能でなくなる．□

4　2 端子ネットワークのスリム化の計算複雑さ

2 端子ネットワーク $N_{s,t}$ が**無閉路**グラフの場合，スリム化の実行には拡大ネットワーク $\widetilde{N}$ において $\check{c}(e)$

を算出するための必要な変更を施せばよい [11].

しかしながら，2 端子ネットワーク $N_{s,t}$ が無閉路グラフでない場合，スリム化は算法的に困難，すなわち NP-完全である．実際，以下に示すように，もし $\tilde{c}(e)$ を算出する (もしくは単に $\tilde{c}(e)=0$ か否かを決定する) 問題が多項式時間で解けるなら，有名な NP-完全問題の一つである **two-path problem** の有向グラフ版 [1, 9] が多項式時間で解ける，すなわち後者の問題は線形時間で前者に変換出来るからである．

証明: 有向グラフ G において，4 個の互いに異なる点 s_1, s_2, t_1, t_2 を選び 2 個の入口 (s_1, s_2) と 2 個の出口 (t_1, t_2) と指定する．G における two-path problem とは s_1 と t_1，s_2 と t_2 を連結する共通点を持たない初等的な 2 本の有向道を見つける問題である．今，G に t_1 と s_2 を結ぶ枝 $\hat{e}$ を付加したグラフを G' とし，s_1 を入口 $s=s_1$，t_2 を出口 $t=t_2$ とする 2 端子ネットワーク $N_{s,t}$ を考える (図 1 参照)．ここで，$N_{s,t}$ の全ての枝に単位容量を与えておく．(G から N は明らかに線形時間で構成できる．)

もし G において，共通点のない 2 本の道 (s_1 から t_1 と s_2 から t_2 への道) が存在するならば，t_1 を s_2 に結ぶ枝 $\hat{e}$ を加えると，それは $N_{s,t}$ における s から t への初等的な道となる．その初等的な道に沿っての単位流は 2 端子 u-flow であるから，$N_{s,t}$ において $\tilde{c}(\hat{e}) \geq 1 (>0)$ である．

逆に，もし $\tilde{c}(\hat{e}) > 0$ であれば，$\hat{e}$ を通過する 2 端子 u-flow が存在するから，s から t への $\hat{e}$ を通過する初等的な道が少なくとも 1 本存在しなければならない．その道の $s=s_1$ から $t_1=\partial^+\hat{e}$ そして $s_2=\partial^-\hat{e}$ から $t=t_2$ の部分は共通点を持たない 2 本の道となる．

このようにして，共通点を持たない (s_1 から t_1，s_2 から t_2 への) 2 本の道が G に存在することと，$N_{s,t}$ において $\tilde{c}(\hat{e})$ が正であることが等価であることが示された． □

5 まとめ

今回は，容量付きネットワークのスリム化を再定義し，それによって生じるいくつかの問題点について検討した．今後は，実際の応用の問題について更に検討を重ねたい．

参考文献

[1] Michel R. Garey and David S. Johnson: *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Freeman, 1979.

[2] 伊理正夫: 制御不能流の理論と応用 (Theory of uncontrollable flow and its applications). **1994 年度日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会予稿集**, pp. 63–64.

[3] Masao Iri: *Network Flow, Transportation and Scheduling — Theory and Algorithms*. Academic Press, New York and London, 1969.

[4] Masao Iri: *An Essay in the Theory of Uncontrollable Flows and Congestion*. TRISE (Technical Report on Information and System Engineering) 94–03, Department of Information and System Engineering, Faculty of Sience and Engineering, Chuo University, September 1994.

[5] 伊理正夫 他: **演習グラフ理論**. コロナ社, 1983.

[6] B. Korte, L. Lovász, H. J. Prömel and A. Schrijver (eds.): *Paths, Flows, and VLSI-Layout*. Algorithms and Combinatorics 9. Springer-Verlag, 1995.

[7] Tomomi Matsui: Is a given flow uncontrollable?. *IEICE Trans. Fundamentals*. Vol. E79–A, No. 4 (April 1996), pp. 448–451.

[8] Xuanxi Ning: Research on the blocking flow in a transportation network. *Transactions of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics*. Vol. 11, No. 2 (December 1994), pp. 215–223.

[9] Y. Perl and Y. Shiloach: Finding two disjoint paths between two pairs of vertices in a graph. *Journal of the Association for Computing Machinery*. Vol. 25, No. 1 (January 1978), pp. 1–9.

[10] Y. Shiloach: A polynomial solution to the undirected two paths problem. *Journal of the Association for Computing Machinery*. Vol. 27, No. 3 (July 1980), pp. 445–456.

[11] 山口雅弘, 伊理正夫: 容量付きネットワークのスリム化について (On Slimming of a Capaciteted Network). **1996 年度日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会予稿集**, pp. 48–49.

[12] Masahiro Yamaguchi and Masao Iri: *On Slimming of a Capacitated Network*. TRISE (Technical Report on Information and System Engineering) 97–01, Department of Information and System Engineering, Faculty of Sience and Engineering, Chuo University, January 1997.

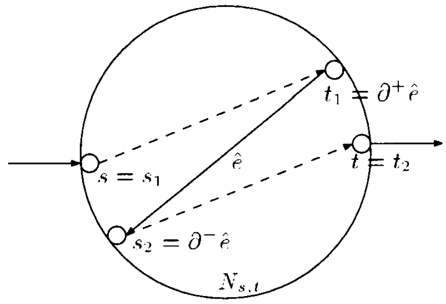

図 1. Two-paths problem から 2 端子ネットワークにおける枝容量 $\tilde{c}(\hat{e})$ の局所最適化への変換