1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

都市内流動量分布の数理的分析

02004370　筑波大学　＊大津　晶　OHTSU Shou
01102840　筑波大学　　腰塚武志　KOSHIZUKA Takeshi

1．はじめに

閉じた領域で一様に発生・集中する移動を仮定したとき，中央部分（正円であれば中心）ほど混雑することが分かっている（[1],[2]）．このことから現実の都心部分の混雑はそこが都心であることが本質的な原因であり，移動の起終点が集中しているからではないことがわかる．また[3]では東京を対象とし，混雑しないために必要な道路率の分布を数値計算を用いて求めている．これらでなされた大局的な議論を実際の都市内流動量分析に応用するためには，流動量の分布の性質をさらに明らかにする必要がある．そこで領域内の流動量の分布を解析的に求める事を本稿の目的とする．

2．流動量の計算方法

まず半径Rの正円の都市領域Dにおいて流動の起終点が密度１で一様に分布し，流動の一単位を点対を結ぶ線分で表すモデルを仮定する（図１）．領域内の任意の位置（離心率$k=h/R$）に半径Δrの微小円を置いてこれを計測領域D_kと定義する．一方の点を起点（あるいは終点）として固定した場合，D内のすべての流動のうちD_kを通過する流動量は図２の斜線部分の面積で表される．これをSとするとD_kを通過する総流動量S_kは以下のように定式化される．

$$S_k = \iint S \,\mathrm{d}p\mathrm{d}\theta .$$

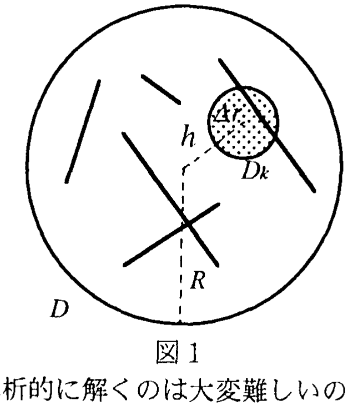

図１

これを解析的に解くのは大変難しいので，面積Sを図３に示す面積S'＝で近似したい．

$$S' = \frac{\Delta r}{p}\left(-h\cos\theta + \sqrt{R^2 - h^2\sin^2\theta}\right)(1+2p)\,p\,\mathrm{d}p\mathrm{d}\theta$$

さらにΔrが領域の半径Rに比べて微小だから，

$$S_k \approx 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\Delta r}^{h\cos\theta + \sqrt{R^2 - h^2\sin^2\theta}} S'\mathrm{d}p\mathrm{d}\theta$$

$$=8\Delta r R^3(1-k^2)\mathrm{E}(k^2).$$

（Eは第２種完全楕円積分）

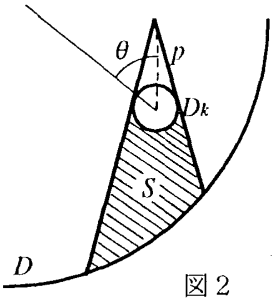

図２

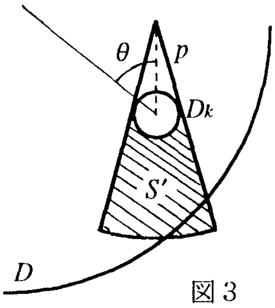

図３

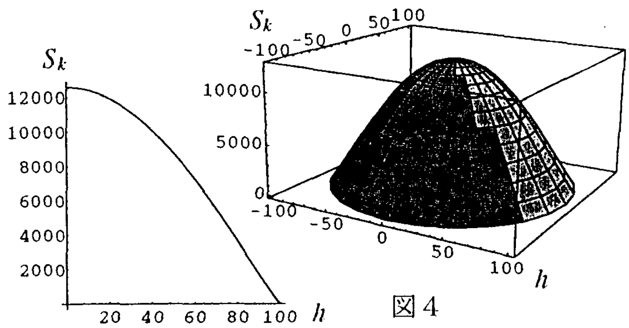

図４

$R=100$, $\Delta r = 0.001$のときの直径を含み領域に対して垂直な断面および流動量分布の概形は図４のようになる．ところで領域DはD_kによる稠密性は保たれていないので，この立体の体積が有意であるかはわからない．

3．微小線分を通過する流動量

正円領域内の半径rの同心円で表した断面に対して，これを通過する総流動量を断面の長さ（円周の長さ）で割ったものを断面流動量fとして以下のように定義できる（[2]より）．

$$f = \frac{R^2-r^2}{r}\left\{\pi R^2 - 2\left(R^2\cos^{-1}\frac{r}{R} - r\sqrt{R^2-r^2}\right)\right\}.$$

これは，単位長さをもつ（同心）円弧を通過する総流動量を表しているが，実は２節で示した微少円通過総流動量S_kを計算する過程で領域Dの半径方向の流動が多くなるようにsinで重み付けしたものに他ならない．つまり重み付けの向きを変化させることで，領域内の任意の微少線分について通過流動量を計算できることがわかる．これをf_{cw}とすると，

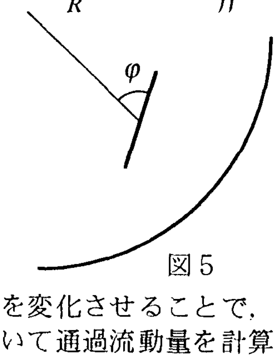

図５

$$f_{cw} = 4\Delta r R^3\left\{\left(1-k^2\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1-k^2}{k}\sin^{-1}k\right\}.$$

一方，同心円方向に重みをつけた流動量f_{sw}は，

$$f_{sw} = 4\Delta r R^3\left\{\left(1-k^2\right) + \frac{\left(1-k^2\right)^2}{k}\tanh^{-1}k\right\}.$$

よって図５のように線分と半径がなす角度をφとおくと，この微小な線分を通過する流動量F_sは，

$$F_s = \sin\varphi \cdot f_{cw} + \cos\varphi \cdot f_{sw}$$

と表すことができる．

４．ランダムな直線を用いた計算

図６のように凸領域Cを横断する直線Lはpとθで一意に決められるが，すべてのpとθに対するLは一様にランダムな直線群と定義できる．念のため一様にランダムな点群から２点ずつ選び出した点対を結んだ直線群は，一様にランダムな直線ではないことを注意しておく．このランダムな直線を用いて２節で導出した総流動量S_kを計算することができる．厳密な議論は[4]のCroftonの第３定理を導出する過程で厳密な議論がなされているのでこれに譲る．

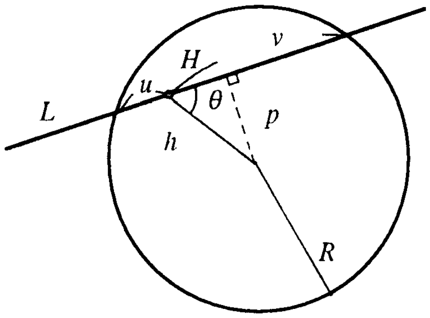

図６

図中の直線Lについて地点Hを通過する流動量f_hは，

$$\begin{aligned} f_h &= u \cdot v(u+v) \\ &= (R-h)\cdot(R+h)\cdot 2\sqrt{R^2-p^2} \end{aligned}$$

（$u \cdot v$はθによらず一定）

のようにかけるので，pとθについて積分することで総流動量F_hは，

$$\begin{aligned} F_h &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\Delta r}^{\Delta r}\left(R^2-h^2\right)\sqrt{R^2-h^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}p\mathrm{d}\theta \\ &= 8\Delta r R^3\left\{1-\left(\frac{h}{R}\right)^2\right\}\mathrm{E}\left\{\left(\frac{h}{R}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

となり，S_kに一致することがわかる．

このランダムな直線は凸領域一般について成り立つという性質を持つので，これまで正円領域に限定していた議論を凸領域にまで拡張できたことになる．当然，流動量分布は数値計算をするほかないが，例えばこの領域に対して相似比αの領域では，対応する各計測領域の流動量がα^3倍になるのは明かである．

５．起終点が正規分布型密度分布の場合

現実の都市では起終点の密度が一様だとは考えにくい．そこで起終点の密度が，人口の分布をよく説明するものとして知られているTanner-Sherratt型の分布に比例すると仮定して，流動量の分布を定式化してみる．この場合流動量の計算はできないが前節のランダムな直線を用いればある程度の議論が可能となる．

流動の起終点が原点を中心とするxy平面上の２次元正規分布で与えられたとき，原点からy軸方向にpだけ離れた断面は，

$$N(p) \equiv \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2+p^2}{2\sigma^2}\right)$$

とかける．よって原点からpだけ離れた直線上の地点Hの流動量f_h^Nは，以下のようにかける．

$$f_h^N = \left(\int_0^{-\infty} N(h\sin\theta)\,\mathrm{d}x - \int_0^{h\cos\theta} N(h\sin\theta)\,\mathrm{d}x\right)\cdot$$
$$\left(\int_0^{\infty} N(h\sin\theta)\,\mathrm{d}x + \int_0^{h\cos\theta} N(h\sin\theta)\,\mathrm{d}x\right)\cdot\int_{-\infty}^{\infty} N(h\sin\theta)\,\mathrm{d}x\,.$$

したがって微小領域D_h^Nを通過する総流動量F_h^Nは，

$$F_h^N = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\Delta r}^{\Delta r} f_h^N\,\mathrm{d}p\mathrm{d}\theta$$

と定式化される．

６．おわりに

簡単な近似を用いて流動量の分布を計算することができた．近似の精度を確認することが課題として残っている．また任意の位置・方向の微小線分の通過流動量も分かったので，これを用いて任意の形状の計測領域を通過する流動量を求めることができよう．これについて今後[3]でなされた数値計算を参考にして計算を試みる．一様にランダムな直線を用いた計算によって都市領域が不定凸図形の場合の流動量も一部取り扱うことができた．一般に起終点の密度が一様でない場合は流動量の計算ができないことがほとんどだが，５節に示したTanner-Sherratt型人口分布についての議論はさらに深めることができると考えている．

今後は現実の流動量分析のデータを用いて，モデルの説明力を検証することが必要である．あるいは逆問題的な発想で，都市内流動量の分布を知るためには現状にどのような調査・計測を加えればよいかといった提案も試みたい．

参考文献

[1]腰塚武志(1992)：都市域の流動に関する理論的考察．都市計画論文集No.27，日本都市計画学会，pp343-348.

[2]及川清昭(1995)：都市空間における経路と流動量に関する計量幾何学的分析　その２ 連続平面上における断面流動量の定式化とその分布様態．日本建築学会大会学術講演梗概集，pp349-350.

[3]田口　東(1996)：内々交通に対する交通路と居住地域の配分 −任意形状の都市−．日本OR学会秋季研究発表会アブストラクト集，pp180-181.

[4]腰塚武志(1976)，積分幾何学について(3)：オペレーションズ・リサーチ，Vol.21,No.11.