

2 種の不完全修理を有する信頼性システムの平均最適な保全政策

瀬川 良之 (Yoshiyuki SEGAWA)
京都学園大学 経営学部* 大西 匡光 (Masamitsu OHNISHI)
東北大学 経済学部

1 はじめに

信頼性・保全性理論において、小修理 (minimal repair) と取替え (replacement) は実際の保全活動の数学モデルとして有用であり、過去これらのモデルを用いた最適保全問題に対して数多くの研究がなされてきている。小修理と予防取替え (preventive replacement; 事前取替えとも言う) との 2 種の保全活動を考慮した最適保全問題は、最初 Barlow and Hunter [1] によって議論された。その後、Phelps [4] は小修理と故障取替え (failure replacement; 事後取り替え, 大修理 (maximal repair) とも言う) との 2 種の保全活動を考慮した最適保全問題を考察した。彼は問題を平均費用規範の semi-Markov 決定過程として定式化し、システムの故障時間分布が IFR (Increasing Failure Rate) であるという仮定の下で、 t -政策の最適性を証明している。ここで t -政策とは、あるしきい値年齢 t に対して、年齢 t 以前の故障には小修理を施し、それ以後の場合には故障取替えを行うという保全政策である。また最近、Segawa, Ohnishi, and Ibaraki [6] は同様の問題を扱い、バスタブ型の故障率関数を含む、Phelps [4] より弱い条件の下で、 t -政策の最適性を証明した。小修理と故障取替えに加え、予防取替えをも考慮した最適保全問題については、Tahara and Nishida [7], Ohnishi, Ibaraki, and Mine [3] がある。

本報告においては小修理あるいは故障取替え (大修理) という両極端な修理の数学モデルではなく、現実の保全活動をより忠実に記述し、それら中間に位置づけられる 2 種の不完全修理の数学モデルを採用して (Brown and Proschan [2]), Phelps [4], Segawa, Ohnishi, and Ibaraki [6] の仮定より弱い、ある妥当な仮定の下で、 t -政策が最適であることを示す。

2 モデルと仮定

以下のような信頼性システムを考える: 任意時刻のシステムは年齢という属性で記述され、これを x 等で表す。システムの故障時間の分布関数を $F(x)$ とし、これは連続な密度関数 $f(x)$ を持つものとする。信頼度関数を $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ 、故障率関数を $\lambda(x) = f(x)/\bar{F}(x)$ で表す。簡単のため、 $\bar{F}(x) > 0, \forall x \in [0, \infty)$ と仮定する。

システムが故障したとき、保全活動として 2 種の (不完全) 修理 P, Q が可能であるとする。故障時点の年齢が x のとき修理 P を行うと、費用 c_P を要し、確率 p で大修理に成功する、すなわち新品同様 (年齢 0) のシステムとなり、確率 $1-p$ で小修理に終わる、すなわち年齢 x が不変のまま稼働状態に復帰する。 $p=0$ の場合は小修理、 $p=1$ の場合は大修理に一致することに注意する。同様に、故障時に修理 Q を行うと、費用 c_Q を要し、確率 q で大修理に成功し、確率 $1-q$ で小修理に終わる。いずれの保全活動に要する時間も無視できるものとする。

問題は、無限計画期間にわたる時間平均の期待費用規範の下で、最適な保全政策を求め、あるいは特徴づけることにある。

本稿では、以下に与える極めて現実的な仮定の下で、ある t -政策が最適政策となることを示す。すなわち、あるしきい値年齢 t に対して、年齢 t 以前の故障には修理 P を施し、それ以後の場合には修理 Q を行うという保全政策が平均最適である。

仮定 2.1

A1 (保全確率): $0 \leq p < q \leq 1$.A2 (保全費用): $0 < c_P < c_Q$.A3 (故障率): 故障率関数 $\lambda(x)$ は年齢 x に関して非減少、かつ $\lambda(\infty) = \infty$ である。 □

3 最適性方程式と最適政策

Ross [5] の結果から次の定理が従う.

定理 3.1 ある有界な関数 v と定数 g が存在して, 最適性方程式

$$v(x) = \min \left\{ \begin{array}{l} c_P + \frac{1-p}{\bar{F}(x)} \left[\int_x^\infty v(s)f(s)ds - g \int_x^\infty \bar{F}(s)ds \right], \\ c_Q + \frac{1-q}{\bar{F}(x)} \left[\int_x^\infty v(s)f(s)ds - g \int_x^\infty \bar{F}(s)ds \right] \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

が成立するならば, g は最適な時間平均の期待費用であり, 上式で決定される定常な保全政策は平均最適である. \square

最適性方程式における v は相対値関数と呼ばれる.

定理 3.2 $\phi(p, q) := pc_Q - qc_P \geq 0$ ならば修理 P のみの政策が最適であり, 一方, $\phi(p, q) < 0$ ならば厳密な t -政策が最適である. \square

このときの相対値関数は

$$v(x) = \begin{cases} \frac{c_P}{p} + (1-p)g\bar{F}^{-p}(x) \int_0^x \bar{F}^p(s)ds - \frac{1-p}{p}c_P\bar{F}^{-p}(x), & x \in [0, t), \\ \frac{c_Q}{q} + (1-q)g\bar{F}^{-q}(x) \int_0^x \bar{F}^q(s)ds - (1-q)g\bar{F}^{-q}(x) \int_0^\infty \bar{F}^q(s)ds & x \in [t, \infty) \end{cases} \quad (3.2)$$

である.

また, (t, g) は連立方程式

$$\eta(t, g) := \frac{\phi(p, q)}{p(q-p)}\bar{F}^p(t) + \frac{c_P}{p} - g \int_0^t \bar{F}^p(s)ds = 0, \quad (3.3)$$

$$\xi(t, g) := \frac{\phi(p, q)}{q(q-p)}\bar{F}^q(t) + g \int_t^\infty \bar{F}^q(s)ds = 0 \quad (3.4)$$

の解であり, $t = \infty$ も含めると解は必ず存在する.

参考文献

- [1] R. E. Barlow and L. C. Hunter, Optimal preventive maintenance policies, *Operations Research* **8**, 90-100 (1960).
- [2] M. Brown and F. Proschan, Imperfect repair, *Journal of Applied Probability* **20**, 851-859 (1983).
- [3] M. Ohnishi, T. Ibaraki, and H. Mine, On the optimality of (t, T) -policy in the minimal-repair and replacement problem under the average cost criterion, in *Proceedings of International Symposium on Maintainability and Reliability 1990-Tokyo*, Held at Tokyo, June 5-8, 1990, Japan, 329-334 (1990).
- [4] R. I. Phelps, Optimal policy for minimal repair, *Journal of the Operational Research Society* **34**, 425-427 (1983).
- [5] S. M. Ross, Average cost semi-Markov decision processes, *Journal of Applied Probability* **7**, 649-656 (1970).
- [6] Y. Segawa, M. Ohnishi, and T. Ibaraki, Optimal minimal-repair and replacement problem with age dependent cost structure *Computers and Mathematics with Applications* **24**, No. 1/2, 91-101 (1992).
- [7] A. Tahara and T. Nishida, Optimal replacement policy for minimal repair model, *Journal of the Operations Research Society of Japan* **18**, 113-124 (1975).