1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

到着率が減少する待ち行列システムの最適保全政策

01107945　*小柳　淳二　(KOYANAGI Junji)　鳥取大学工学部
01103205　河合　一　(KAWAI　Hajime)　鳥取大学工学部

1　はじめに

遊園地やパチンコ店では最初は人気があった器具が時間とともに人気がなくなり到着する客が減ってくる、そのような場合、古い設備を新しい設備に入れ替えて客足を取り戻すことが必要になる。本研究ではこのようなモデルをサーバーの状態に依存した到着率を持つ待ち行列システムとして取り扱い、その最適保全政策の性質について述べる。

2　モデルと記号

$M/M/1/N$ 待ち行列システムを考え、そのサーバーは $0,1,\ldots,s$ の番号のついた $s+1$ 個の状態を持ち、状態 k から l に推移率 β_{kl} でマルコフ的に推移するものとする。($\beta_{kl}=0\ (k\geq l)$) 客はサーバーの状態が k のときに到着率 λ_k でシステムに到着し、サービス率 μ でサービスを受けてシステムから退去する。サーバーを状態 0 に戻すには、保全作業が必要であり、それには、分布関数 $H(x)$ に従う時間 x がかかるとする。ただし、保全中客の到着はなく、また保全開始時点にシステム内にいた客は全て失われるものとする。

システムが利得を得る時点として次の 2 種類の場合を考える。

Case. 1 客が到着した時点で 1 単位の入場料を得る、ただし、保全開始時に失われる客に対してはそれを払い戻す。

Case. 2 客がサービスを終えた時点で 1 単位のサービス料を得る。

システムの状態を系内人数 i とサーバーの状態 k の組 (i,k) で表わし、状態推移が生じた時点で次のどちらかの決定を行う。

Action 1 サーバーの保全を開始する。

Action 2 稼動を続ける。

目的はシステムが得る総期待割引コスト（割引因子 α）を最大にするように各時点でのアクションを決定することである。

次の記号を定義する。

$$\beta_k=\sum_{l=0}^{s}\beta_{kl},\quad \Gamma=\sum_{k=0}^{s}\beta_k,$$

$$\alpha_{kl}=\beta_{kl}\ (k\neq l),\quad \alpha_{kk}=\Gamma-\beta_k,$$

$$\lambda=\sum_{k=0}^{s}\lambda_k,\quad \Lambda=\lambda+\mu+\Gamma+\alpha,$$

$$h=\int_0^\infty e^{-\alpha t}\overline{H}(x)dx.$$

3　マルコフ決定過程による定式化

$V(i,k)$ 状態 (i,k) に対する最適コスト関数

$W(i,k)$ 状態 (i,k) で稼動を続けた（Action 2）ときからの最適コスト関数

$A(i)$ 状態 (i,k) で保全を行った（Action 1）ときからの最適コスト関数

$D(i,k)$ 状態 (i,k) における最適アクション（1 or 2）

とする。

β_{kl} と λ_k に関し、次の仮定をおく

仮定 1

1. すべての m に対し $\sum_{l=m}^{s}\beta_{kl}\uparrow k$
2. $\lambda_k\downarrow k$. □

仮定 1.1 は状態が大きくなるほど、さらに大きな状態に推移しやすくなることを示し、仮定 1.2 は状態が大きくなるにつれて、到着率は減少することを示す。仮定 1.1 に対して次の補題が成立する。

補題 1

$$f_l\downarrow l\implies\sum_{l=0}^{s}\alpha_{kl}f_l\downarrow k\ □$$

3.1 到着時に入場料を得る場合

入場時に客から入場料 1 を得て、保全開始時に失われる客に対してはそれを払い戻すシステムを考える。

最適性方程式は次のようになる

$$W(0,k)=\frac{1}{\Lambda}[\lambda_k(V(1,k)+1)+\mu V(0,k)+\sum_{l=0}^{s}\alpha_{kl}V(0,l)+(\lambda-\lambda_k)V(0,k)]$$

$$W(i,k)=\frac{1}{\Lambda}[\lambda_k(V(i+1,k)+1)+\mu V(i-1,k)+\sum_{l=0}^{s}\alpha_{kl}V(i,l)+(\lambda-\lambda_k)V(i,k)]$$
$$(1\le i\le N-1)$$

$$W(N,k)=\frac{1}{\Lambda}[\lambda_k V(N,k)+\mu V(N-1,k)+\sum_{l=0}^{s}\alpha_{kl}V(N,l)+(\lambda-\lambda_k)V(N,k)]$$

$$A(i)=-i+(1-\alpha h)V(0,0)$$

$$V(i,k)=\max\{W(i,k),A(i)\}$$

逐次近似法を用いることにより次の性質が証明される。

定理 1

1. $V(i,k)\le\lambda_0/\alpha$,
2. $W(i,k)\downarrow k$,
3. $W(i+1,k)-W(i,k)\ge -1$. □

上の結果から最適政策の構造について次の結果を得る。

定理 2

1. $D(i,k)\downarrow k$,
2. $D(i,k)\uparrow i$. □

さらに $\lambda_0\le\mu$ (サービス率が常に到着率以上である。)の仮定をおくことにより次の性質が証明される。

定理 3

$W(i,k)\ge A(i)\quad(i\ge 1)$ □

これは、システム内に客がいるときに保全作業を行うべきでないことを示す。($D(i,k)=2$ for $i\ge 1$)

3.2 サービス終了時にサービス料を得る場合

サービス終了時に利得 1 を得るシステムに対しては、最適性方程式は次のようになる。

$$W(0,k)=\frac{1}{\Lambda}[\lambda_k V(1,k)+\mu V(0,k)+\sum_{l=0}^{s}\alpha_{kl}V(0,l)+(\lambda-\lambda_k)V(0,k)]$$

$$W(i,k)=\frac{1}{\Lambda}[\lambda_k V(i+1,k)+\mu(V(i-1,k)+1)+\sum_{l=0}^{s}\alpha_{kl}V(i,l)+(\lambda-\lambda_k)V(i,k)]$$
$$(1\le i\le N-1)$$

$$W(N,k)=\frac{1}{\Lambda}[\lambda_k V(N,k)+\mu(V(N-1,k)+1)+\sum_{l=0}^{s}\alpha_{kl}V(N,l)+(\lambda-\lambda_k)V(N,k)]$$

$$A=(1-\alpha h)V(0,0)$$

$$V(i,k)=\max\{W(i,k),A\}$$

前節と同様に逐次近似法を用いることにより、次の性質が証明できる。

定理 4

1. $V(i,k)\le\mu/\alpha$,
2. $W(i,k)\downarrow k$,
3. $W(i,k)\uparrow i$,
4. $W(i,k)\ge A$ for $i\ge 1$. □

上の性質から、最適政策の構造について次の結果を得る。

定理 5

1. $D(0,k)\downarrow k$,
2. $D(i,k)=2\quad(i\ge 1)$. □

すなわち、客がいる時に保全を行うことは最適でなく、系内客数が 0 で、ある状態以上に推移した時保全を行うのが最適であることがわかる。

4 おわりに

本研究ではシステムが有限容量の場合について述べたが、無限容量の場合にも同様の性質を示すことができる。