

組み立て型待ち行列システムの近似解析

01991076 福岡工業大学 * 宋 宇 SONG Yu
福岡工業大学 上田 文人 UEDA Fumito

1. はじめに

生産システムをモデル化し、解析を行なうために、待ち行列理論はよく用いられる。しかし、大規模なモデルは、理論的な解析が極めて困難な上、マルコフ連鎖の解析などによる数値計算も事実上不可能である。このため、近似解法に関する研究が必要となる。

本研究の研究対象となるのは、生産システムにおける組み立て型の生産をとらえるモデル(図1)である。そこでは、ノード3において、ノード1のサービスを終了した客とノード2のサービスを終了した客は別々のバッファにならび、ノード3がサービスを始めるために、両方のバッファに客が少なくとも一人ずついなければならない。

このような組み立て型モデルについての研究のほとんどは、組み立てノードが一つだけのモデルを扱っている。それに対し、本研究は有限バッファをもつ組み立てノードが複数存在するネットワークモデルを解析の対象とする。有限バッファによって生じるブロッキングについては通信型ブロッキングルールを用いる。このようなモデルに対し、[1]で行なわれた極小型ブロッキングルールの直列型待ち行列モデルについての近似解析法を適用し、近似解を求める。

2. モデル

例として、図2のような10個のノードからなるツリー状の待ち行列ネットワークを考えよう。

ノード1からノード4の各ノードの前にはそれぞれ

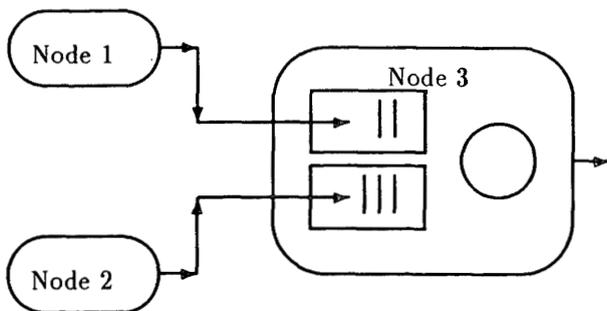


図1: 組み立て構造

無限大の客のプールがあり、常に客がサービスを待っている。ノード10でサービスを受けた客はシステムから退去する。

ノード $k (> 4)$ への入力は、1つのノード(ノード $u(k)$) または2つのノード(ノード $u_1(k), u_2(k)$) からの出力である。簡潔のため、組み立てノードの場合に $u(k)$ を $u_1(k)$ と $u_2(k)$ とのどちらかを意味するとする。さらに、誤解の生じない場合、 $u(k), u_1(k), u_2(k)$ をそれぞれ u, u_1, u_2 で表す。

ノード $k (> 4)$ には各入力ノードのためにそれぞれバッファを用意する。すべてのバッファに客がいる場合に限り、各バッファからそれぞれひとりずつの客が窓口に進み、いっしょにサービスを受ける。空のバッファが一つでもあれば、ノード k の窓口はサービスを始めることができない。

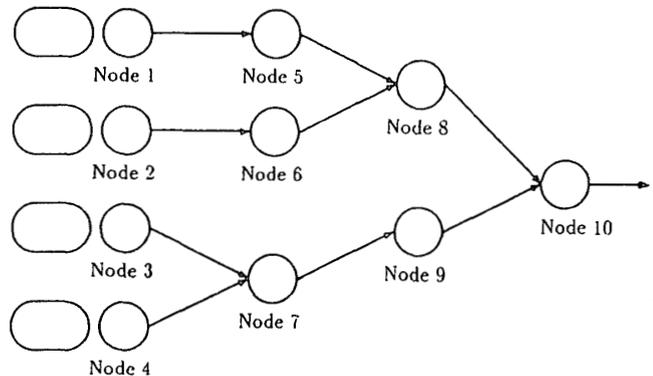


図2: 組み立て型待ち行列ネットワークモデル

ノード $k (< 10)$ とその下流のノード $d(k)$ (誤解が生じる恐れがなければ d で表す) との間のバッファはバッファ k とする。バッファ k には「かんばん」と呼ばれるカードが C_k 枚あり、バッファに入る客に必ず一枚もたせる。客は下流のノードでのサービスを受けている間もそのかんばんを持ち続け、サービスを終了してからかんばんを返す。したがって、バッファ k で待機できる客の数は C_k によって制限される。バッファ k のかんばんが無くなれば、ノード k の窓口がブロックされ、サービスを始めることができない。このブロッキングルールは通信型ブロッキングである。

各ノードは単一窓口であり、ノード k の窓口のサービ

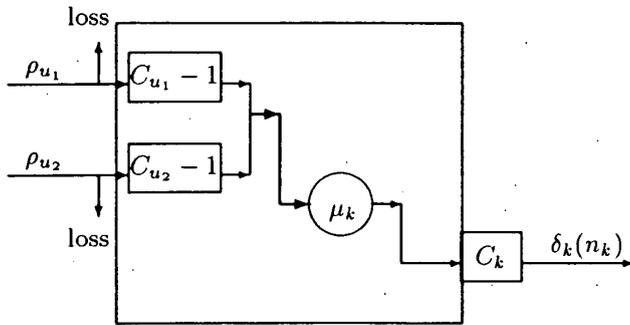


図 3: 近似サブシステム k

ス時間はサービス率 μ_k の指数分布にしたがうとする。

バッファ k のかんばんをもつ客の数を n_k とすれば、われわれはベクトル (n_1, n_2, \dots, n_9) , $n_k = 1, 2, \dots, C_k$ をもってシステムの状態を表すことができる。

3. 近似法

まず、システムを各ノードを中心に、図 3 のような近似サブシステムに分解する。

下流のノード $d(k)$ はサイズ C_k のバッファをもって近似する。ノード k でのサービスを終了した客がいったんこのバッファに入る。バッファ内の客数 n_k が正のとき、客が平均 $1/\delta_k$ のポアソン過程に従ってバッファから退去するとする。ここで、

$$\delta_k(n_k) = \begin{cases} 0, & n_k = 0, \\ \delta_k, & n_k = 1, 2, \dots, C_k \end{cases}$$

とおく。

外部から上流のバッファ $u(k)$ への到着流は、到着率 ρ_u のポアソン過程で近似する。バッファ u がいっぱいになれば、到着した客がロスとなる。

この近似サブシステムの状態は (n_{u_1}, n_{u_2}, n_k) をもって表すことができる。定常状態における (n_{u_1}, n_{u_2}, n_k) の確率は $P_k(X'_{u_1} = n_{u_1}, X'_{u_2} = n_{u_2}, X'_k = n_k)$ で、周辺確率は $P_k(X'_u = n_u)$ および $P_k(X'_k = n_k)$ で表す。

近似サブシステム k のスループットを T'_k とおくと、 T'_k は単位時間あたりの平均到着客数なので、

$$(1) \quad T'_k = \rho_u [1 - P_k(X'_u = C_u)]$$

である。同時に T'_k は単位時間あたりの平均退去客数でもあるので、

$$(2) \quad T'_k = \delta_k [1 - P_k(X'_k = 0)]$$

で求めることもできる。

これらの式から出発して、

$$\text{仮定 1: } T'_{u(k)} = T'_k = T'_{d(k)}$$

をおくことにより、

$$(3) \quad \rho_u = T'_{u(k)} / [1 - P_k(X'_u = C_u)]$$

$$(4) \quad \delta_k = T'_{d(k)} / [1 - P_k(X'_k = 0)]$$

で ρ_u と δ_k を推定することができる。

他方、

$$\text{仮定 2: } P_{u(k)}(X'_{u(k)} = C_{u(k)}) = P_k(X'_u = C_u)$$

$$P_{d(k)}(X'_k = 0) = P_k(X'_k = 0)$$

より、

$$(5) \quad \rho_k = T'_k / [1 - P_k(X'_k = C_k)]$$

$$(6) \quad \delta_k = T'_{d(k)} / [1 - P_{d(k)}(X'_k = 0)]$$

が得られる。

上記の式の中から、 ρ_u と δ_k に関するものをそれぞれ一本使って、反復解法によって近似解を求めることができる。[1] では、数値実験の結果、極小型ブロッキングをもつ直列型待ち行列システムに関しては (4) と (5) (組み合わせ 1) を組み合わせることによって得られる近似解の精度がもっとも高いことが認められた。しかし、本論文で扱われるモデルについては、パラメータによっては (3) と (6) (組み合わせ 2) の方がよりいい近似解が得られることもあることが分かった。

4. 数値結果

表 1: スループット ($\mu_1 = \dots = \mu_{10} = 4$)

かんばん	Simulation	(4) & (5)	(3) & (6)
$C_k = 1$	1.135 ± 0.01	1.084	1.084
$C_k = 2$	1.828 ± 0.01	1.780	1.770
$C_k = 3$	2.266 ± 0.01	2.226	2.218
$C_k = 4$	2.555 ± 0.01	2.238	2.524
$C_k = 5$	2.764 ± 0.01	2.744	2.743
$C_k = 6$	2.919 ± 0.01	2.905	2.908
$C_k = 7$	3.038 ± 0.01	3.030	3.033

参考文献

- [1] Mitra, D., and Mitrani, I., "Analysis of a Novel Discipline for Cell Coordination in Production Lines, I", Management Science 36 (1990) 1548-1566.