1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

価値が時間に関係する縄張りのゲーム

01302694　大阪府大・総科　寺岡　義伸
大阪府大・総科　呉　妮
01704036　三菱重工業(株)　山田　康吉

1．Introduction

ここで取り扱う問題は、２種の動物がある縄張りをめぐって競う現象の理論的説明づけから示唆されたゲームであり、２企業間のある新製品の市場をめぐる競争や広告の問題である。

２人のプレーヤ、player Ⅰ とⅡが、ある縄張りの獲得をめぐって対立している。その縄張りは経過時間に関して変化する価値 V(t)を持っている。その対立はにらみ合いではじまり、単位時間区間[0,1]の中で、そのにらみ合いをより長く持続できたほうが勝ちとなる勝者はV(t)の価値を持つ縄張りを手に入れることができるが、時刻 t まで持続するためには、両者とも h(t)の費用を使わなければならない。さらに価値V(t)は、V(0)≧0 でありV(1)＝0 と変化するものとする．各々は、どの時刻でこのにらみあいを断念すべきか、お互いに相手の行動を考えに入れながら決定なければならない．

このような問題にあっては、両プレーヤにとって利用できる情報様式には，二つの型がある。両者とも相手の行動が常に観測でき，どの時刻においても相手がまだ頑張っているのか，もう既に断念してしまったのかが知らされる場合をNoisy 型と呼ぶ．反対に、両者はお互いに相手から自分の行動を観測されない状態にしてあり、そのため何の情報もない中でどの時点まで頑張るかをあらかじめ決定し自分の計画した時間が実現されてみて始めて、相手がまだ頑張っているのか、もう既に断念してしまった後なのかが知らされる場合をSilent 型と呼ぶ。

ここで、後の議論のため以下のように仮定と記号を設定する：

両プレーヤにとって許された行動期間は有限区間とするのが自然であり、上記のように単位区間[0,1]としても一般性は失われない．縄張りの価値V(t)は通常ある時刻までは増加し、その後減少とするのが自然であるが、ここではもっと一般的に扱うためV(t)は(0,1)上で連続的微分可能V(0)≧0,V(1)＝0 かつ V(t)＞0　t∈(0,1)として別の条件を費用とからめて加える．持続に要する費用 h(t)も h(0)=0 とするのが自然であるがh(t)は(0,1)上で連続的微分可能h(0)≧0 かつ　h`(t)＞0　t∈(0,1)と仮定する．

上記のようにV(t)とh(t)を仮定した上で、少し複雑であるがV(t)－h(t)は[0,1]上で unimodal との条件を加える．そしてmをV(t)－h(t)の[0,1]での最大値を与える t の値としV(m)－h(m)＞0 としておく．したがって

$$V(t)-h(t)\left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\}0 \text{ 、}\qquad t\in\left\{\begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix}\right\}m \quad .$$

次にx∈[0,1]とy∈[0,1]をそれぞれ Player Ⅰ とⅡの純戦略としたとき、Ⅰ とⅡが混合戦略として[0,1]上のcdfs F(x)とG(y)を用いた場合、[0,1]×[0,1]上の実数値関数（利得関数）Mi(x,y)に対して、次のような期待値の記号を用いることにする:

$$M_i(F,y)=\int_0^1 M_i(x,y)dF(x)\ ;\quad M_i(x,G)=\int_0^1 M_i(x,y)dG(y),\quad M_i(F,G)=\int_0^1\int_0^1 M_i(x,y)dF(x)G(y).$$

2．Noisy Game

ここでは、両プレーヤとも相手の行動を常に観測できるから、x ∈[0,1]、y ∈[0,1]をそれぞれ I 、II の純戦略とし、Mi(x,y)を Player i にとっての期待利得とすると(i =1,2)

$$(1)\ M_1(x,y)=\begin{cases}-h(x), & x<y\\ \frac{1}{2}V(x)-h(x), & x=y\\ \max_{x\geq y}\{V(x)-h(x)\}, & x>y\end{cases}\ ;\quad (2)\ M_2(x,y)=\begin{cases}-h(y), & y<x\\ \frac{1}{2}V(y)-h(y), & y=x\\ \max_{y\geq x}\{V(y)-h(y)\}, & y>x\end{cases}$$

が得られる. ここで V(t)－h(t)を最大にする t∈[0,1]を m とおくと

$$\max_{x\geq y}\{V(x)-h(x)\}=\begin{cases}V(m)-h(m), & y\leq m\\ V(y)-h(y), & y>m\end{cases}\ ;\quad \max_{y\geq x}\{V(y)-h(y)\}=\begin{cases}V(m)-h(m), & x\leq m\\ V(x)-h(x), & x>m\end{cases}$$

を得る.

さて、非 0 和ゲーム(1)と(2)では、純戦略の中に平衡戦略は存在しない、したがって混合戦略の中から平衡戦略を探すことにし、 Player I とIIの混合戦略を次のように想定する：

$M_1(x,y)$ と $M_2(x,y)$ の対称性より、両プレーヤの混合戦略 F (•)は (m,1)⊂[0,1]上での density part f(•)>0 および点mでの mass part $\alpha\geqq 0$ より構成される[0,1]上の cdf である.

定理 1. F* を $F^*(z)=\begin{cases}0, & 0<x<m\\ 1-\exp(-\int_0^z \frac{h'(t)}{V(t)}dt), & m\leq x\leq 1\end{cases}$

で与えられるものとする。すると(F*(x)、F*(y))はゲーム(1)と(2)の平衡点であり、この時 M_1 (F*、F *)= M_2 (F*、F *)=－h(m)となる。

3. Silent Game

ここでは、両者は共に相手の行動が観測できないから、Player I とIIの期待利得 $M_1(x,y)$ と $M_2(x,y)$ は

$$(3)\ M_1(x,y)=\begin{cases}-h(x), & x<y\\ \frac{1}{2}V(x)-h(x), & x=y\\ \max_{x\geq y}\{V(x)-h(x)\}, & x>y\end{cases}\ ;\quad (4)\ M_2(x,y)=\begin{cases}-h(y), & y<x\\ \frac{1}{2}V(y)-h(y), & y=x\\ \max_{y\geq x}\{V(y)-h(y)\}, & y>x\end{cases}$$

で与えられる。前節と同様に混合戦略の中から平衡戦略を求めることとし、Player I とIIの混合戦略 F(x)と G(y)を次のように想定する。

F(•)と G(•)は同一の[0,1]上の cdf であり、ある区間(m,u)⊂[0,1]での density part f(•)>0 と点m での mass part $\alpha>0$ および点 u での mass part $\beta\geqq 0$ とで構成される。

定理 2. V '(t)<0 for t∈(m,1)を仮定し、u°を方程 V(t)= h(t)－h(m)の(m,1)における唯一根とする。そうすると cdf

$$F^\circ(z)=\begin{cases}0, & 0\leq x<m\\ \{h(x)-h(m)\}/V(x), & m\leq x<u^0\\ 1, & u^0\leq x\leq 1\end{cases}$$

とすると,F°(x)と G°(y)は非 0 和ゲーム(3)と(4)の 1 つの平衡点であり, M_1 (F° ,F °)= M_2 (F°,G°)= －h(m)となる。