1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

安定で協調的操作不可能、極小な社会的選択対応の値のもつ性質について

01605580 東京経済大学 *水谷昌義 MIZUTANI Masayoshi
01206633 松阪大学 佐藤祐司 SATOH Yuuji

1. はじめに

社会的決定問題は、複数のプレイヤーたちからなる社会 $N=\{1,2,\cdots,n\}(n\geqq 2)$ の各メンバーの、複数の選択肢からなる集合 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}(m\geqq 2)$ 上への選好 $\succ$ にしたがって、選択肢に対する社会としての決定を行う問題である。選択肢の部分集合を社会として決定する場合、その問題は全プレイヤーの選好プロファイル $\succ_N=(\succ_1,\succ_2,\ldots,\succ_n)$ と選択肢の部分集合とを対応づける社会的選択対応 (SCC) と呼ばれる写像 $G:\mathcal{L}^N\to 2^A$ で記述される ($\mathcal{L}^N$ は可能なプロファイルすべての集合)。

SCC の値が空集合になる、つまり、社会の選択の結果が何も決まらないということは、ある特定の実例では起こることではあるが現実の問題に広く適用するのには限界がある。すなわち、SCC の値は任意のプロファイルに対してつねに非空な集合であるという性質 (安定性) が要求される。

また、プレイヤーの一部が協調して選好の表明を偽り、その結果彼らにとってより望ましい選択肢集合が得られた場合、それは社会のルールとして採用するのにはふさわしくない。社会的な公平さをもつ SCC には操作の不可能性が求められる。それは、個人によって操作されることがないのは勿論、複数のプレイヤーが協調しても操作できないことがより望ましい (協調的操作不可能性)。

あらゆる選好に対してつねに全選択肢を値とする SCC は明らかに協調的操作不可能ではあるが、それは全く意味をなさない。社会的に出した結論であるから、SCC の値は含まれる選択肢の個数が少なければ少ないほど好ましいといえる。よって、SCC の値は集合として小さいこと (極小性) にも注目される。

本報告では、プレイヤーの選好は線形順序とし、以上の性質を満たす SCC の値と、[1] によって定義された SCC のあるサブクラスに属する SCC の値との関係を明らかにする。また、諸条件を満足する SCC の実例も紹介する。

2. 記号と定義

記号とその内容を次のように定める。

$S(a;\succ_N)=\left\{i\in N\;\middle|\;a\succ_i a' \text{ for } {}^\forall a'\in A-\{a\}\right\}$: 選択肢 a の支持者の集合

$\overline{A}(\succ_N)=\{a\in A\mid S(a;\succ_N)\neq\emptyset\}$: 支持者のいる選択肢の集合

操作不可能性を定義するため、選択肢上の選好順序$\succ$から選択肢集合間の選好順序 $Q(\succ)$ をつぎのように定める:

任意の $B,B'\subset A$ に対して、

(1) $\overline{a}(\succ)\in B$ かつ $\underline{a}(B;\succ)\succ\underline{a}(B';\succ)$ ならば $BQ(\succ)B'$、

(2) $\overline{a}(\succ)\notin B-B'$ かつ $\underline{a}(B;\succ)\not\succ\underline{a}(B';\succ)$ ならば $BQ(\succ)B'$ ではない。

ここで、$\overline{a}(\succ)$ は選好$\succ$において A のなかで最高位に位置付けられる選択肢、$\underline{a}(B;\succ)$ は B のなかで最下位に位置付けられる選択肢を表す。

この順序に従い、協調的操作不可能性をつぎのように定義する:

任意のプロファイル$\succ_N$に対して、以下の条件を満たすプレイヤー集合 $S = S_1 \cup S_2$ および$\succ'_S$が存在しないときをいう

つぎの選択肢 a または b が存在して $G(\succ_{N-S}, \succ'_S) Q_S (\succ_S) G(\succ_N)$ が成り立つ

(1) $a \notin G(\succ_{N-S}, \succ'_S)$ 、ただし $a = \underline{a}(G(\succ_N); \succ_i)$ for $^\forall i \in S_1$

(2) $b \in G(\succ_{N-S}, \succ'_S) - G(\succ_N)$ 、ただし $b = \overline{a}(\succ_i)$ for $^\forall i \in S_2$

3. 停留拡張集合

あるSCC G が与えられたとき、次の規則により、値が1点集合または空集合であるような特殊なSCC gを誘導する:

$$g(\succ_N) \equiv \begin{cases} \{a\} & \text{ただし } G(\succ_N) = \{a\} \text{ または } S(a; \succ_N) = N \text{のとき} \\ \emptyset & \text{それ以外のとき。} \end{cases}$$

このとき、gから次式により新たなSCC K_g (停留拡張集合) を定義する:

$$K_g(\succ_N) \equiv \left\{ a \in A \,\middle|\, \text{for } ^\forall \succ'_N ; S(a; \succ'_N) \supset S(a; \succ_N),\ g(\succ'_N) = \{a\} \text{ または} \emptyset \right\}$$

Cui ら [1] は、gが空集合以外に2種類以上の値をもつとき、K_gは協調的操作不可能であることを証明した。また、G が安定で協調的操作不可能、さらに弱停留条件を満たす場合には K_gは安定で、あらゆるプロファイルに対して G に含まれることも示した。

さらに、gの値の極大性が K_gの値の極小性を意味することに注目して次の定理を得た: SCC G は安定で、協調的操作不可能、弱停留条件を満たすとする。また、G から導出された gは極大であるとする。このとき、K_gは安定で協調的操作不可能なSCCの族のなかで極小なSCCである。

ただし、弱停留条件を満たすとは次の両条件を満たすことである:

(1) あるプロファイル$\succ_N$において、$S(a; \succ_N) \neq \emptyset$ なる選択肢 $a \notin G(\succ_N)$ が存在するならば、$S(b; \succ_N) = \emptyset$ なる任意の選択肢 $b \in A$ に対して $b \notin G(\succ_N)$ である。

(2) $G(\succ_N) = \{a\}$ なるプロファイル$\succ_N$が存在するとき、$S(b; \succ_N) \neq \emptyset$ なる任意の選択肢 $b \in A - \{a\}$ は、$S(b; \succ'_N) \subset S(b; \succ_N)$ かつ$\succ'_{S(b;\succ'_N)} = \succ_{S(b;\succ'_N)}$なる任意のプロファイル$\succ'_N$に対して、$b \notin G(\succ'_N)$ である。

4. 安定、協調的操作不可能、極小なSCCの値のもつ性質

前述の定理の諸条件を満たすSCC G の値とそれから導かれた K_gの値との関係を考察して、以下の関係が得られた。

$$G(\succ_N) \cap \overline{A}(\succ_N) = K_g(\succ_N) \text{ for } ^\forall \succ_N \in \mathcal{L}^N$$

すなわち、SCC G がその値に支持者をもたない選択肢を決して含まないならば、G はそれから誘導された K_gに一致することを意味する。

参考文献

[1] Cui, W.T., Nishino, H., Mizutani, M., Satoh, Y., Lee, N.: A Stable, Coalitionally Nonmanipulable and Minimal Social Choice Correspondence, *Mimeo*, 1994.

[2] 水谷昌義: 安定性と協調的操作不可能性、極小性を満たす社会的選択対応についての考察, 東京経大学会誌, No.196, 1996.