1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

単調な半正定値線形相補性問題に対する内点法における探索方向の存在に関する一考察

01206500 *信太 正之 Masayuki SHIDA 神奈川大学
01204630 進藤 晋 Susumu SHINDOH 防衛大学校
01103520 小島 政和 Masakazu KOJIMA 東京工業大学

1 はじめに

単調半正定値線形相補性問題(SDLCP)は、線形計画問題(LP)、凸2次計画問題、単調線形相補性問題(LCP)、半正定値線形計画問題(SDP)を含む非常に広いクラスの問題である。近年、LPやLCPを解く為の内点法アルゴリズムの枠組が、SDPやSDLCPに対しても拡張できることがわかってきた[1, 2, 3, 4]。本研究は、これらの新しい解法に見られる探索方向が一意的に存在することを、統一的に述べるものである、

単調半正定値線形相補性問題(SDLCP)とは次のような問題である。

$$\text{Find an } (\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \in \mathcal{S}_+ \times \mathcal{S}_+ \quad \text{such that } (\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \in \mathcal{F},\ \mathbf{Tr}\ \boldsymbol{XY} = 0,$$

ただし、$\mathcal{S}, \mathcal{S}_+, \mathcal{S}_{++}$ はそれぞれ $n\times n$- 対称行列、$n\times n$- 対称半正定値行列、$n\times n$- 対称正定値行列のクラスとし、$\mathcal{F}$ は $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$ の極大単調アフィン部分空間とする。ここで $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$ の極大単調アフィン部分空間とは、$\dfrac{n(n+1)}{2}$- 次元で、かつ、$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y}_1),(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y}_2)\in\mathcal{F}$ ならば $\mathbf{Tr}\ (\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2)(\boldsymbol{Y}_1-\boldsymbol{Y}_2)\geq 0$ となるアフィン部分空間のことである。

2 探索方向って一体...

LPやLCPの場合と同様に、SDLCPに対しても中心パス $\mathcal{C}$ が考えられる。

$$\mathcal{C} := \{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \in (\mathcal{S}_+\times\mathcal{S}_+) : (\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\in\mathcal{F}, \boldsymbol{XY} = a\boldsymbol{I}, a\in(0,\infty)\}.$$

SDLCPに対する内点法では、現在いる点 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\in\mathcal{S}_{++}\times\mathcal{S}_{++}$ から、中心パス上の点を目指して、パラメータ a の値を0に動かしながら、点列を更新していく。中心パスを追う為に、探索方向 $(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})$ を求めるのであるが、単純に

$$\begin{cases} (\boldsymbol{X}+\boldsymbol{U},\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{V})\in\mathcal{F}, \\ \boldsymbol{XV}+\boldsymbol{UY} = \beta a\boldsymbol{I}-\boldsymbol{XY} \quad (\text{つまり}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{U})(\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{V}) = \beta a\boldsymbol{I}\text{の線形近似}) \end{cases} \quad (*)$$

としてはいけない。なぜならば、一般的に $(*)$ は(対象な)解を持つとは限らないからである。これまで、対称な探索方向を求める為に $(*)$ の第2式に代わるシステムがいくつか提案されてきた。

$$\begin{array}{ll} \textbf{(1)} & \boldsymbol{XV}+\boldsymbol{VX}+\boldsymbol{UY}+\boldsymbol{YU} = 2\beta a\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{XY}+\boldsymbol{YX}),\ [1] \\ \textbf{(2)} & \boldsymbol{X}(\boldsymbol{V}+\tilde{\boldsymbol{V}})+(\boldsymbol{U}+\tilde{\boldsymbol{U}})\boldsymbol{Y} = \beta a\boldsymbol{I}-\boldsymbol{XY},\ (\tilde{\boldsymbol{U}},\tilde{\boldsymbol{V}})\in\tilde{\mathcal{F}},\ [2] \\ \textbf{(3)} & \boldsymbol{X}^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{XV}+\boldsymbol{UY})\boldsymbol{X}^{\frac{1}{2}}+\boldsymbol{X}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{VX}+\boldsymbol{YU})\boldsymbol{X}^{-\frac{1}{2}} = 2(\beta a\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{YX}^{\frac{1}{2}}),\ [3] \\ \textbf{(4)} & \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{US}^{-1}+\boldsymbol{V} = -\boldsymbol{Y}+\beta a\boldsymbol{X}^{-1},\ \text{ただし、}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{X}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{X}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{YX}^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{X}^{\frac{1}{2}},\ [4]. \end{array}$$

ただし、$\tilde{\mathcal{F}}$ は、$n\times n$- 歪対称行列空間 $\mathcal{S}^\perp$ に対して、$\mathcal{S}^\perp\times\mathcal{S}^\perp$ の極大($\dfrac{n(n-1)}{2}$- 次元)単調アフィン部分空間とする。**(3)** は **(2)** の特別な場合だとわかっている。

LCPに対する中心パスを特徴づける $\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{y}_i = \beta a\ (i=1,\cdots,n)$ の線形近似式は

$$\mathbf{Diag}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}+\mathbf{Diag}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{u} = \beta a\boldsymbol{e}-\mathbf{Diag}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}$$

と相場が決まっていた。LCPに対する探索方向は、任意の正ベクトル $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ に対して一意的に存在することが知られている[5]。

さて、$(*)$ の第2式に代わりに上記のシステム **(i)** を用いたとして、SDLCPの探索方向は一意的にうまく定義できるのであろうか。

問題 (探索方向の一意存在性)： $\mathcal{F}$: 極大単調アフィン部分空間、$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\in\mathcal{S}_{++}\times\mathcal{S}_{++}$ とする。このとき、**i=1, 2, 3, 4** に対して、

$$\{(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})\in\mathcal{S}\times\mathcal{S} : (\boldsymbol{X}+\boldsymbol{U},\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{V})\in\mathcal{F}, \textbf{(i)}\ \text{を満たす}\}$$

は1点であるか。

3 単調性と反単調性

$\mathcal{H}$ を有限次元の実内積空間 ($\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathcal{H}$ に対して、内積を $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ で表す) とする。

定義 (極大単調と極大反単調)： $\mathcal{F}$ が $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ の**単調集合** (**反単調集合**) とは、任意の $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1),(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2)\in\mathcal{F}$ に対して、

$$(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)\cdot(\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_2)\geq 0 \quad ((\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)\cdot(\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_2)\leq 0,\mathrm{resp.}),$$

となることである。特に、異なる2点に対して等号が成り立たない時、**強 (反) 単調**という。(反) 単調集合 $\mathcal{F}$ が**極大**であるとは、$\mathcal{F}$ を真に含む (反) 単調集合が存在しないことである。 ∎

補題 1： アフィン部分空間 $\mathcal{F}$ が $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ の極大 (反) 単調集合であるとすると、$\dim\mathcal{F}=\dim\mathcal{H}$ が成り立つ。 ∎

補題 2： $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$ を、それぞれ、極大単調アフィン部分空間、極大強反単調アフィン部分空間であるとする。このとき、$\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2$ は1点である。 ∎

さて、$n\times n$- 対称行列空間 $\mathcal{S}$ は、$\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y}\equiv\mathbf{Tr}\ \boldsymbol{XY}$ として $\frac{n(n+1)}{2}$- 次元の実内積空間である。現在の点 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\in\mathcal{S}_{++}\times\mathcal{S}_{++}$ に対して、$\{(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})\in\mathcal{S}\times\mathcal{S}:(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{U},\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{V})\in\mathcal{F}\}$(つまり $(*)$ の第1式を満たす $(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})$ の集合) は極大単調アフィン部分空間となる。よって、探索方向の一意存在性を示す為には、補題2より、**(i)** で定義される集合が極大強反単調アフィン部分空間となることを示せば十分である。

付録 – クロネッカー積

$n\times n$- 行列 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$、$m\times m$- 行列 $\boldsymbol{B}=(b_{ji})$ に対して、$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のクロネッカー積 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ を次のように定義する

$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & a_{12}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{1n}\boldsymbol{B} \\ a_{21}\boldsymbol{B} & a_{22}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{2n}\boldsymbol{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\boldsymbol{B} & a_{n2}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{nn}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}.$$

この時、$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ は $(nm\times nm)$- 行列になる。$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ の固有値をそれぞれ $\{\alpha_i\}_{i=1,\cdots,n}$、$\{\beta_j\}_{j=1\cdots,m}$ とすると、$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ の固有値は $\{\alpha_i\beta_j\}_{i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,m}$ となる。このことから、**二つの対称 (半) 正定値行列のクロネッカー積は対称 (半) 正定値行列になる**。また、$n\times n$- 行列 $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$, $\boldsymbol{A}_4$ に対して、$(\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{A}_2)(\boldsymbol{A}_3\otimes\boldsymbol{A}_4)=(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_3)\otimes(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_4)$ が成立する。特に正則であれば、$(\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{A}_2)^{-1}=\boldsymbol{A}_1^{-1}\otimes\boldsymbol{A}_2^{-1}$ が成立する。$n\times n$- 行列 $\boldsymbol{A}$ に対して、

$$\mathbf{vec}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix},$$

と定義する。ここで $\boldsymbol{a}_i$ は $\boldsymbol{A}$ の i- 列である。もしも、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{Y}$ を $n\times n$- 行列とすると、

$$\mathbf{vec}(\boldsymbol{AYB})=(\boldsymbol{B}^\top\otimes\boldsymbol{A})\mathbf{vec}\boldsymbol{Y}$$

が成立する。詳しくは [6] などを参照のこと。

References

[1] F. Alizadeh, J.-P.A. Haeberly and M.L. Overton. Primal-Dual Interior-Point Methods for Semidefinite Programming. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1994.

[2] M. Kojima, S. Shindoh, and S. Hara. Interior-point methods for the monotone semidefinite linear complementarity problem in symmetric matrices. to appear in SIAM J. on Optimization.

[3] R.D.C. Monteiro. Primal-dual algorithms for semidefinite programming. School of Industrial and Systems Enginnering, Georgia Tech., Atlanta, 1995.

[4] Y. Nesterov and M. Todd. Primal-Dual Interior-Point Methods for Self-Scaled Cones, School of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell University, 1995.

[5] M. Kojima, N. Megiddo, T. Noma and A. Yoshise. A Unified Approach to Interior Point Algorithms for Linear Complementarity Problems, Springer-Verlag, New York, 1991.

[6] A. Graham. Kronecker Products and Matrix Calculas with Applications, Ellis Horwood Limited, John Willey & Sons, New York, 1981.