1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

変分不等式問題と等価な制約なし最適化問題

奈良先端科学技術大学院大学　*山下 信雄　YAMASHITA Nobuo
田地 宏一　TAJI Kouichi
福島 雅夫　FUKUSHIMA Masao

1　序論

変分不等式問題 (VIP) は, 閉凸集合 $S \subseteq R^n$の中から次式を満たすベクトル x を見つける問題である.

$$\langle F(x), y - x\rangle \geq 0 \quad \text{for all } y \in S.$$

ここで Fは R^nからそれ自身への連続的微分可能関数とし, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は内積を表すとする.

最近, 変分不等式問題を等価な最適化問題

$$\min_{x\in X} \quad f(x)$$

に再定式化して解く方法が活発に研究されている. ただし, Xは R^nのある部分集合である. 一般に, 等価な最適化問題を構成する目的関数 fをメリット関数と呼ぶ.

これまでに VIP に対するいくつかのメリット関数が提案されている. Fukushima [1] は次の正則化ギャップ関数を提案している.

$$f_\alpha(x) = \sup_{y\in S}\left\{\langle F(x), x - y\rangle - \frac{\alpha}{2}\|x - y\|^2\right\}$$

ここで, αは正のパラメータである. 正則化ギャップ関数 f_αは連続的微分可能であり, この関数を制約集合 S上で最小化する問題は VIP と等価になる.

Wu et al. [3] は正則化ギャップ関数を一般化した次の関数を提案している.

$$\hat{f}_\alpha(x) = \sup_{y\in S} \Psi_\alpha(x, y)$$

ここで,

$$\Psi_\alpha(x, y) = \langle F(x), x - y\rangle - \alpha\phi(x, y)$$

(ただしαは正の定数) であり, $\phi : R^{2n} \to R$は次の条件をみたす関数である.

C.1 ϕは R^{2n}上で連続的微分可能である.
C.2 ϕは R^{2n}上で非負である.
C.3 $\phi(x, \cdot)$ は一様強凸である.
C.4 $\phi(x, y) = 0 \iff x = y$.

条件 C.1–C.4 を満たす関数ϕには次のようなものがある.

- $\phi(x, y) = \psi(x - y)$. ここで, $\psi : R^n \to R$は R^n上で強凸であり, $\psi(x) \geq 0,\ \forall x \in R^n$, かつ$\psi(0) = 0$ であるような連続的微分可能関数である.

Wu et al. [3] は, この関数$\hat{f}_\alpha$が正則化ギャップ関数のいくつかの性質を引き継いでいることを示している.

関数 f_αや$\hat{f}_\alpha$を目的関数とする最適化問題は, いずれも制約つき問題であり, VIP と等価な制約なし最適化問題を構成することは重要な研究課題となっていた. これに対して Yamashita and Fukushima [4] は最近, これまでに知られたいくつかのメリット関数の Moreau-Yosida 正則化を用いることにより, VIP と等価な制約なし微分可能最適化問題が構成できることを示した. さらに, Peng [2] は正則化ギャップ関数を用いて定義される関数

$$M_\alpha(x) = f_{\frac{1}{\alpha}}(x) - f_\alpha(x)$$

がやはり VIP と等価な制約なし微分可能最適化問題を構成することを示した. ここで, αは 1 より大きい正の定数である.

以下では, 関数 M_αを D-gap 関数と呼ぶことにする. 本稿の目的は, この D-gap 関数を一般化し, その性質を調べることである.

2　D-gap 関数の一般化

本稿では, D-gap 関数を次の 2 つの意味で一般化し, その性質を明らかにする.

- D-gap 関数の定義式に含まれる $1/\alpha$とαをそれぞれ $0 < \alpha < \beta$をみたす任意のαとβに置き換える.
- D-gap 関数を構成する正則化ギャップ関数 f_αを Wu et al. [3] の関数$\hat{f}_\alpha$に置き換える.

関数 $g_{\alpha\beta} : R^n \to R$を次式で定義する.

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(x) &= \hat{f}_\alpha(x) - \hat{f}_\beta(x) \\ &= \max_{y\in S} \Psi_\alpha(x, y) - \max_{y\in S} \Psi_\beta(x, y) \end{aligned}$$

ここで, αとβは $0 < \alpha < \beta$をみたす任意の定数である.

3 一般化されたD-gap関数の性質

一般化されたD-gap関数$g_{\alpha\beta}$の微分可能性は$\hat{f}_\alpha$の微分可能性から直ちに得られる.

定理 3.1 ϕは*C.1-C.4*をみたすとする. そのとき, $g_{\alpha\beta}$は連続的微分可能である. □

また, 次の定理により, $g_{\alpha\beta}$を目的関数とする制約なし最適化問題はVIPと等価となることがわかる.

定理 3.2 ϕは*C.1-C.4*をみたすとする. そのとき, すべての$x \in R^n$に対して, $g_{\alpha\beta}(x)$は非負である. さらに, $g_{\alpha\beta}(x) = 0$が成り立つこととxが*VIP*の解であることは等価である. □

次に, $g_{\alpha\beta}$の停留点がVIPの解となるための条件を示す. そのために, ϕに次の条件を付加する.

C.5 $\nabla_x \phi(x,y) = -\nabla_y \phi(x,y), \forall x, y \in R^n$.

定理 3.3 ϕは*C.1-C.5*をみたすとする. そのとき, xが$g_{\alpha\beta}$の停留点であり, さらに$\nabla F(x)$が正定値ならば, xは*VIP*の解である. □

次に$g_{\alpha\beta}$がVIPの大域的エラーバウンドを与える条件を調べる. そのために, ϕに次の条件を付加する.

C.6 $\nabla_y \phi(x, \cdot)$は一様リプシッツ連続である.

なお, エラーバウンドの性質を示すためには, 条件C.5は必要としない.

定理 3.4 ϕは*C.1-C.4*と*C.6*をみたすとする. もし, 次の3つの条件のうちどれか1つが成り立っていれば, $\sqrt{g_{\alpha\beta}}$は*VIP*に対する大域的エラーバウンドになる.
(a) Fは強単調かつリプシッツ連続である.
(b) Fは強単調かつ$S = R^n$である.
(c) Fは強単調かつSは有界である. □

この結果より, つぎの系が直ちに得られる.

系 3.1 ϕは*C.1-C.4*と*C.6*をみたすとする. もし, 定理*3.4*の3つの条件のうちどれか1つが成立していれば, $g_{\alpha\beta}$の任意のレベル集合はコンパクトである. □

4 降下法

この節では, 一般化されたD-gap関数$g_{\alpha\beta}$を最小化する降下法のアルゴリズムを提案する.

降下法のアルゴリズム

ステップ0: 初期点x^0を適当に選び$k := 0$とする.

ステップ1: 探索ベクトルd^kを次式で定める.

$$d^k := r(x^k) + \rho s(x^k)$$

ここで, ρは十分小さい正の定数とし,

$$\begin{aligned} r(x) &:= H_\alpha(x) - H_\beta(x), \\ s(x) &:= \alpha \nabla_x \phi(x, H_\alpha(x)) - \beta \nabla_x \phi(x, H_\beta(x)). \\ H_\gamma(x) &:= \arg\max_{y \in S} \Psi_\gamma(x,y), \ \gamma = \alpha, \beta \end{aligned}$$

とする.

ステップ2: $x^{k+1} := x^k + t_k d^k$とする. ただしt_kは

$$\min_{0 \le t \le 1} g_{\alpha\beta}(x^k + td^k)$$

の解である.

ステップ3: 収束判定条件を満たせば終了し, そうでなければ$k := k+1$としてステップ1へ.

探索方向ベクトルd^kの計算は, $\nabla F(x^k)$を必要としないため, $\nabla g_{\alpha\beta}(x^k)$よりも容易に求められる. このアルゴリズムに対して次の収束定理が成り立つ.

定理 4.5 Fを強単調関数とする. このとき, 上のアルゴリズムによって生成される点列の任意の集積点は*VIP*の解である. □

参考文献

[1] Fukushima, M., Equivalent differentiable optimization problems and descent methods for asymmetric variational inequality problems, *Mathematical Programming*, Vol. 53, pp. 99–110, 1992.

[2] Peng, J.M., Equivalence of variational inequality problems to unconstrained optimization, Technical Report, Academia Sinica, Beijing, China, 1995.

[3] Wu, J.H., Florian, M. and Marcotte, P., A general descent framework for the monotone variational inequality problem, *Mathematical Programming*, Vol. 61, pp. 281–300, 1993.

[4] Yamashita, N. and Fukushima, M., Equivalent unconstrained minimization and global error bounds for variational inequality problems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, to appear.