1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

フロンティアからの一次距離の最小化を考慮したDEAモデル

02003780 東京理科大学 伊藤 竜一 ITO Ryuichi
02401460 東京理科大学 生田目 崇* NAMATAME Takashi
01701440 東京理科大学 山口 俊和 YAMAGUCHI Toshikazu

1 はじめに

多入力多出力系の効率の評価方法にDEA(Data Envelopment Analysis)がある．DEAでは，対象とする意思決定体(DMU : Decision Making Unit)の複数の入力値，出力値から相対的な効率値(D効率値)を求め評価を行っている．また，非効率と評価されるDMUに対して改善案を与えることができる．

DEAの様々なモデルの中に加法モデル[2]がある．加法モデルはCCR,BCCモデルと違い，入出力項目を同時に考慮する．さらに，Traslation Invarianceであるという長所もある．加法モデルでは入力と出力を同時に考慮した改善案が得られる．

最近，加法モデルに対するいくつかの効率性尺度が提案されている．しかし，従来の加法モデルから得られる偏差は，効率的フロンティアに対する偏差の和（一次距離）の最大値である．DEAでは各DMUにとって最も有利な評価を行う．しかし，従来の加法モデルで得られる偏差から効率の評価をおこなっているので，非効率的なDMUにとっては不利に評価されていると考えられる．

そこで本発表では，効率的フロンティアに対する一次距離の最小値を求める方法を提案する．

2 加法モデル

DEAの加法モデルは次のように定式化される．

【P1 : Additive model】

最大化

$$\sum_{i=1}^{m} s_{ia}^{-} + \sum_{r=1}^{k} s_{ra}^{+} \tag{1}$$

制約条件

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij}\lambda_{aj} = X_{ia} - s_{ia}^{-} \quad (i=1,\cdots,m) \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} Y_{rj}\lambda_{aj} = Y_{ra} + s_{ra}^{+} \quad (r=1,\cdots,k) \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{aj} = 1 \tag{4}$$

$$s_{ia}^{-} \geq 0 \quad (i=1,\cdots,m) \tag{5}$$

$$s_{ra}^{+} \geq 0 \quad (r=1,\cdots,k) \tag{6}$$

$$\lambda_{aj} \geq 0 \quad (j=1,\cdots,n) \tag{7}$$

加法モデルでは，偏差の和の最大化を目的関数にしている．目的関数が0の場合，そのDMUは効率的フロンティア上にあり，D効率的なDMUと評価できる．

ここで，単に加法モデルの目的関数を最小化とすると，非効率的なDMUについてもその最適目的関数値は0となり意味がない．

3 提案する方法

効率的フロンティアまでの偏差の和の最小化をはかるために【P1】について，D効率的なDMUに対応するλ_{ja}のみが正の値を持てるという条件をつけ加えても，生産可能領域の内側に張る超平面上に改善案をもつように解が求まる場合がある．つまりこの方法では効率的フロンティア上に改善案を求められない場合がある．

そこで効率的フロンティアをそれを構成する超平面ごとに分割し，その各面に対する偏差の最小和を求める．そしてその中での最小値を求める．

定式化すると【P2】のようになる．

【P2】

最小化

$$\min_{q}\left(\sum_{i=1}^{m} s_{iaq}^{-} + \sum_{r=1}^{k} s_{raq}^{+}\right) \tag{8}$$

制約条件

$$\sum_{j\in H_q} X_{ij}\lambda_{aj} = X_{ia} - s_{iaq}^{-} \tag{9}$$

$$(i=1,\cdots,m; q=1,\cdots,l)$$

$$\sum_{j\in H_q} Y_{rj}\lambda_{aj} = Y_{ra} + s_{raq}^{+} \tag{10}$$

$$(r=1,\cdots,k; q=1,\cdots,l)$$

$$\sum_{j\in H_q} \lambda_{aj} = 1 \quad (q=1,\cdots,l) \tag{11}$$

$$s_{ia}^{-} \geq 0 \quad (i=1,\cdots,m) \tag{12}$$

$$s_{ra}^{+} \geq 0 \quad (r=1,\cdots,k) \tag{13}$$

$$\lambda_{aj} \geq 0 \quad (j\in H_q; q=1,\cdots,l) \tag{14}$$

ただし，lは効率的フロンティアを構成する超平面の総数，H_qはその超平面qを構成するDMUの集合である．

【P2】の最適目的関数値は従来の加法モデル同様，0のの場合D効率的となり，正の場合はD非効率的となる．

効率的フロンティアを，それを構成する超平面に分割するためには Avis ら [1] の多面体および超平面の頂点列挙のアルゴリズムによる cdd(C implementation of the Double Description) や，Mathematica 上にインプリメントされた VertexEnum.m などを利用することによって求めることができる．

4 数値例

次のような 10 個の DMU をもつ 2 入力 1 出力の数値例を考える．BCC モデルで D 非効率的となるのは DMU_I と DMU_J である．

表 1: 数値例

DMU	入力 1	入力 2	出力
A	2	6	3
B	3	3	3
C	3	7	6
D	4	4	6
E	5	7	7
F	6	2	3
G	7	3	6
H	7	5	7
I	4	5	3
J	5	6	4

この数値例での効率的フロンティアは図 1 のようになる．

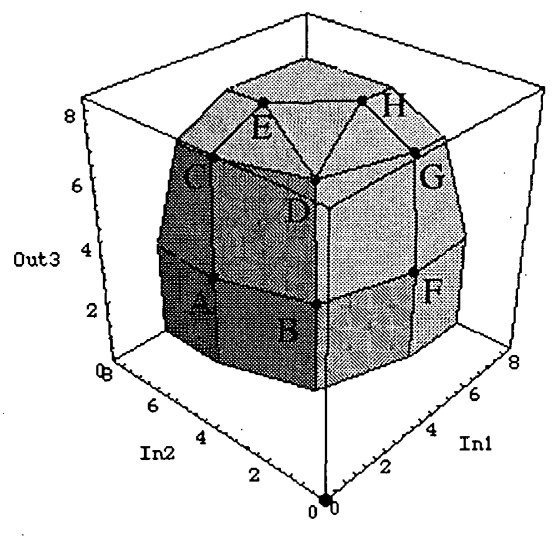

図 1: 効率的フロンティア

D 非効率的な DMU について，BCC モデルの入力指向，出力指向，加法モデル，提案する方法での改善案に対する偏差を比較する（表 2, 表 3）．

表に示す通り提案する方法がフロンティアまでの偏差の和が一番小さい．

表 2: DMU_Iの偏差

	DMU_I			
	入力 1	入力 2	出力	合計
BCC（入力指向）	1.2	1.5		2.7
BCC（出力指向）			3.2	3.2
加法モデル		1.0	3.0	4.0
提案するモデル	1.7			1.7

表 3: DMU_Jの偏差

	DMU_J			
	入力 1	入力 2	出力	合計
BCC（入力指向）	1.8	2.2		4.0
BCC（出力指向）			2.8	2.8
加法モデル	1.0	2.0	2.0	5.0
提案するモデル	2.6			2.6

5 おわりに

本発表では，フロンティアからの偏差の一次距離の最小化を考慮した DEA を提案した．ここでは，フロンティアを構成する面を分割することで目的関数の最小化をはかることができる．

しかし，入出力項目間の単位の一元化をどのようにするかという問題もある．また，非効率的な DMU について一つの項目が効率的フロンティアに近い場合，その項目にのみ偏差を持つバランスの悪い解を求めてしまう．

参考文献

[1] D. Avis and K. Fukuda: "A Pivoting Algorithm for Convex Hulls and Vertex Enumeration of Arrangements and Polyhedra", Discrete and Computationl Geometory, Vol.8, pp295–313(1992).

[2] A.Charnes et. al.: "Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto–Koopmans Efficient Empirical Production Functions", Journal of Econometrics, Vol.30, pp.91–107(1985).

[3] 刀根薫: 「経営効率性の測定と改善」, 日科技連出版社 (1993).