1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

ヘッジ比率に上下限制約のついた国際分散投資モデル

01102370　東京工業大学　今野 浩　Hiroshi KONNO
01266490　東京工業大学　鈴木 賢一*　Kenichi SUZUKI
東京工業大学　森尻 宗数　Munetaka Morijiri

1. はじめに

企業活動の多国籍化にともない、投資機会の拡大、カントリーリスクの回避のために、国際的な分散投資が有効であるとされている。しかし、国外の資産を投資対象としてもちいる国際ポートフォリオを構築する際には、資産の収益の変動に加え、為替レートの変動もリスクとして考慮する必要がある。例えば [1] によれば、投資対象として各国の証券市場の index を利用した場合、リスク (=variance) の半分以上を、為替リスクが占めることも珍しくない。

これらの為替の変動をヘッジするために、為替先物を用いる手法がよく知られている。ヘッジによる先物通貨は、必ずしも投資対象国と対応している必要はなく、その組合せによって bilateral hedge、cross hedge、matched hedge、basket hedge などに分類することができる。これらの戦略は、ヘッジ比率を適正にコントロールすることにより、単にリスクの減少だけでなく、より積極的に収益の増加を目指すことも可能である。

これらの戦略のもとで最適なポートフォリオの構築を行なうにあたっては、(1) まず、海外資産への投資比率を最適化した後に、ヘッジ比率を最適化する２段階法、(2) 投資比率を固定して、ヘッジ比率のみ最適化する方法、(3) ヘッジ比率を固定して、投資比率のみ最適化する方法、等が提案されている。いずれの方法も、一方を固定した上で他方を決定しているため、両者の相関構造が活かされていないという欠点がある。

本研究では、ヘッジ比率に上下限制約がついている場合に最適ポートフォリオを構築する手法を提案し、さらにその拡張として、ヘッジ額全体を最小化するモデルについても考える。

2. 国際分散投資モデル

2.1 投資環境と戦略

以下のように投資環境を設定する。

- n 個の投資対象国 C_i, $(i=1,\ldots,n)$ があり、投資対象国 C_i には、n_i 個の資産が存在する。各資産は、期首・期末において、i 国通貨単位でそれぞれ、S_j^i、$\tilde{S}_j^i$, $(j=1,\ldots,n_i)$ となっている。($\tilde{}$ は、確率変数を示す。以下同じ。)
- i 国通貨１単位あたりの自国通貨との交換比率は、期首・期末においてそれぞれ、E_i、$\tilde{E}_i$, $(i=1,\ldots,n)$ である。また期首において、期末の交換比率を F_i $(i=1,\ldots,n)$ で予約することができる。
- 各国資産は、空売りできない。また、資産は無限に分割可能である。さらに、取引コストおよび税金はないものとする。

上記の投資環境のもとで、投資家は以下のような取引戦略をとるものとする。

投資家は、初期資産総額 W を、期首時点における交換比率で各国通貨に交換し、それぞれの国の資産に投資を行なう。同時に、期末において各国通貨を H_iF_i で買う予約を入れ、期末時点で $H_i\tilde{E}_i$ を売り、清算する。また資産も期末において売却し、自国通貨に交換する。

上記の戦略では、i 国資産への初期投資額 W_i は自国通貨建てで、$W_i=E_i\sum_{j=1}^{n_i}S_j^i$ となり、$W=\sum_{i=1}^{n}W_i$ である。W_i は、期末において

$$\tilde{E}_i\sum_{j=1}^{n_i}\tilde{S}_j^i+F_iH_i-\tilde{E}_iH_i \tag{2.1}$$

となる。よって、全体の収益率 $\tilde{R}$ は、

$$\tilde{R}=\sum_{i=1}^{n}(\tilde{E}_i\sum_{j=1}^{n_i}\tilde{S}_j^i+F_iH_i-\tilde{E}_iH_i)/W-1 \tag{2.2}$$

となる。ここで、以下の記号

w_i : i 国への資産配分比。$(w_i=W_i/W\geq 0)$
x_j^i : i 国 j 資産への配分比。$(x_j^i=E_iS_j^i/W_i\geq 0)$
h_i : i 国資産に対するヘッジ比率。$(h_i=H_i/\sum_{j=1}^{n_i}S_j^i)$
$\tilde{r}_j^i$: i 国 j 資産の収益率。$(1+\tilde{r}_j^i=\tilde{S}_j^i/S_j^i)$
$\tilde{e}_i$: i 国為替の収益率。$(1+\tilde{e}_i=\tilde{E}_i/S_i)$
f_i : $=F_i/E_i-1$

を導入すると、(2.2) は、

$$\begin{aligned}\tilde{R}\ &=\sum_{i=1}^{n}w_i\{\sum_{j=1}^{n_i}(1+\tilde{e}_i)(1+\tilde{r}_j^i)x_j^i-(\tilde{e}_i-f_i)h_i\}-1\\ &\approx\sum_{i=1}^{n}w_i\{\sum_{j=1}^{n_i}(\tilde{e}_i+\tilde{r}_j^i)x_j^i-(\tilde{e}_i-f_i)h_i\}\end{aligned} \tag{2.3}$$

と表される。

2.2 最適ポートフォリオ

投資家は、収益とリスクの二つのパラメータによって投資行動を決定するものとする。リスクについては、収益

率のstandard deviation (Markowitz)、absolute deviation (Konno)、lower partial moment (Bawa) などが挙げられるが、ここでは一般的に $f(\tilde{R})$ と表記する。また、収益率については、期待値 $\mathrm{E}(\tilde{R})$ を用いる。

ヘッジ比率 h_iについては、無限に先物を売買することはあり得ないので、上限・下限が存在するのが普通である。なお、$h_i = 1$ と固定したものが、通常 full hedge と呼ばれるものである。

目標とする収益率ρが与えられた時、投資家は、以下の最適化問題を解いて、最適ポートフォリオを求める。

$$
\left|\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad f(\sum_{i=1}^{n} w_i\{\sum_{j=1}^{n_i}(\tilde{e}_i + \tilde{r}_j^i)x_j^i - (\tilde{e}_i - f_i)h_i\}) \\
\text{subject to} \\
\mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n} w_i\{\sum_{j=1}^{n_i}(\tilde{e}_i + \tilde{r}_j^i)x_j^i - (\tilde{e}_i - f_i)h_i\}) \geq \rho \\
\sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \ \sum_{j=1}^{n_i} x_j^i = 1, \quad i = 1, \ldots, n \\
l_i \leq h_i \leq u_i, \quad i = 1, \ldots, n \\
w_i \geq 0, \ x_j^i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n; \ j = 1, \ldots, n_i
\end{array}\right. \tag{2.4}
$$

2.3 問題の変型

問題 (2.4) は、収益率が一次式の積の和の形で表現されているので、たとえ $f(\cdot)$ が凸関数であっても、非凸計画問題となり、一般に解くことは極めて難しいと考えられてきた。しかし、ヘッジ比率に関する制約が上下限制約のみなので、以下のように簡単な変数変換によって、凸計画問題に帰着することができる。すなわち、$y_j^i = w_i x_j^i$、$z_i = w_i h_i$とおくと (2.4) は

$$
\left|\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad f(\sum_{i=1}^{n}\{\sum_{j=1}^{n_i}(\tilde{e}_i + \tilde{r}_j^i)y_j^i - (\tilde{e}_i - f_i)z_i\}) \\
\text{subject to} \\
\mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n}\{\sum_{j=1}^{n_i}(\tilde{e}_i + \tilde{r}_j^i)y_j^i - (\tilde{e}_i - f_i)z_i\}) \geq \rho \\
\sum_{j=1}^{n} w_i = 1, \ \sum_{j=1}^{n_i} y_j^i = w_i, \quad i = 1, \ldots, n \\
l_i w_i \leq z_i \leq u_i w_i, \quad i = 1, \ldots, n \\
w_i \geq 0, \ y_j^i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n; \ j = 1, \ldots, n_i
\end{array}\right. \tag{2.5}
$$

と書き換えることができる[1]。これは、例えば、$f(\cdot)$ がstandard deviation であれば、2次計画問題である。

[1] [3] においても同様の変数変換を用いて問題を変形しているが、z_iへの変換について、w_iと h_iの関係を消去してしまっているため、変形した問題はもとの問題と等価ではなくなっている。

3. ヘッジ額最小化問題

問題 (2.4) では、ヘッジ比率についてのみ、上下限の制約がついていたが、現実の投資では必ずしも十分なヘッジのための金額を用意できるとは限らない。むしろ、ヘッジ額に制約がついたり、あるいは、これ自身が最適化の対象になることも考えられる。この場合、与えられた収益 (ρ) とリスク (v) の水準ののもとで、ヘッジ額を以下のように最小化するというかたちで、投資家の問題が定式化できる。

$$
\left|\begin{array}{l}
\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i} S_j^i h_i \\
\text{subject to} \\
f(\sum_{i=1}^{n}\{\sum_{j=1}^{n_i}(e_i + r_j^i)y_j^i - (e_i - f_i)z_i\}) \leq v \\
\mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n}\{\sum_{j=1}^{n_i}(e_i + r_j^i)y_j^i - (e_i - f_i)z_i\}) \geq \rho \\
\sum_{j=1}^{n} w_i = 1, \ \sum_{j=1}^{n_i} y_j^i = w_i, \quad i = 1, \ldots, n \\
l_i w_i \leq z_i \leq u_i w_i, \quad i = 1, \ldots, n \\
w_i \geq 0, \ y_j^i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n; \ j = 1, \ldots, n_i
\end{array}\right. \tag{3.1}
$$

この問題は一見すると、とても手に負えないように見えるが、適切な変数変換を施すと、$n \leq 5$ 程度であれば、低ランク大域的最適化アプローチを用いて最適解を計算できる。

4. 数値実験

発表当日にあたっては、上記のモデルに関して、実際のデータを用いて数値実験を行なった結果を発表する予定である。

References

[1] C. S. Eun and B. G. Resnick, "Exchange Rage Uncertainty, Forward Contracts, and International Portfolio Selection", *J. of Finance*, vol 43, p197–215, 1988

[2] H. Konno, P. T. Thack and H. Tuy, *Optimization on Low Rank Nonconvex Structures*, Kluwer Academic, 1996 (to appear)

[3] M. Shinozaki, "最適通貨配分を考慮した国際分散投資モデル", ジャフィー・ジャーナル, p3–19, 1995