1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

極限モーメント法の提案とその応用

01000170　青山学院大学　阿部俊一(ABE Shun-ichi)

1．研究の経緯と目的

ユニットの長寿命化により実地の故障データからの信頼度推定が困難な場合も多いが，筆者は文献[1],[2]で，ユニットの寿命Xがワイブル分布

(1)　$R(x)=P(X>x)=\exp\left\{-(x/c)^m\right\}$　$(x\geq 0)$

に従い，かつ，使用一故障(取替)一使用一…の時間経過が定常な再生過程となる場合に，任意の時点τに使用中のユニットのその時点までの使用時間(年令)Sをn個の再生過程に対して観測したデータ$s_1,s_2,\cdots,s_n$による未知パラメータmとcの推定法を研究した．このとき，定常再生過程の性質から上記の使用時間Sの確率密度関数は，

(2)　$g(s)=R(s)/\mu$　$\left(\mu=E(X)=c\Gamma(1+1/m)\right)$

であり，またS^aの期待値は，$a>0$のとき

(3)　$E\left(S^a\right)=c^a\Gamma((a+1)/m)/\Gamma(1/m)\equiv\upsilon_a$

であるから，mとcの推定には，最尤法やモーメント法の使用が考えられる．しかし，これらの方法ではmの推定値が求まらない場合が多いことが文献[4]に示されている．筆者は，この問題に対して，文献[2]と[3]で，通常モーメント法(OMM)を拡張した“拡張モーメント法(EMM)”を提案した．この方法では，適当な実数$a>b>0$に対するa次およびb次のモーメント：

(3)　$\overline{S^a}=\sum_{i=1}^n s_i{}^a/n$ ，$\overline{S^b}=\sum_{i=1}^n s_i{}^b/n$

を用い，mとcの初期推定値$\tilde{m}$と$\tilde{c}$を求めるための方程式は

(4)　$c=\left\{\overline{S^a}\Gamma(1/m)/\Gamma((a+1)/m)\right\}^{1/a}$

$=\left\{\overline{S^b}\Gamma(1/m)/\Gamma((b+1)/m)\right\}^{1/b}$

である．適当な$a>b>0$に対し，(4)を満たす解$\tilde{m}$が存在するとき，更に$\tilde{m}$のmに対する偏り$B(\tilde{m})$と平均2乗誤差$MSE(\tilde{m})$を近似的に評価する式を導くことができるから，$\tilde{m}$の偏りを補正したmの推定値$\tilde{m}_1$から$MSE(\tilde{m}_1)$を近似的に最小にする(a,b)の値$\left(\tilde{a},\tilde{b}\right)$を数値的に求め，この$\left(\tilde{a},\tilde{b}\right)$を(4)の$(a,b)$に代入して$m$の第2次推定値を求める．この手順を2～3回反復して，mの推定値m^*を求めるのである．筆者は，文献[2],[3]で提案した拡張モーメント法により，与えられたデータに対して実数$a>b>0$を適切に選べば，どんな場合でもmの推定値を求めることができるであろうと期待した．しかし，このような(a,b)の数値的探索で点検する(a,b)は有限個だけであるため，目指す(a,b)が容易に見つからない場合も(最尤法やOMMよりはるかに少ないが)起こり得る．

本稿では，与えられたデータ$s_1,s_2,\cdots,s_n$に対して最尤法やOMMでmの推定値が求まらない場合に，EMMのaとbを具体的にどう選べばmの推定値が得られるかを追究し，新たにaをbに収束させた極限として得られる方程式を導き，この式のbの値を適切に調整すれば，この方程式はほぼ確実に解$\check{m}$を持つこと，および，$\check{m}$のmに対する平均2乗誤差$MSE\left(\check{m}\right)$を漸近的に最小にするように$b$を更新し，更に，得られた$\check{m}$の偏りを修正して$m$の最終的な推定値$m^{\#}$を求める“極限モーメント法(LMM)”を提案し，その適用例とモンテカルロ・シミュレーションの結果を示す．特に上記のLMMと最尤法の関係が示される．

2．極限モーメント法の導入

与えられた$a>b>0$と$\overline{S^a}$，$\overline{S^b}$を用いて前節で述べた拡張モーメント法(EMM)により，mの推定

値$\tilde{m}$を求めようとしても，$\overline{S^a}$と$\overline{S^b}$が

(5) $\overline{S^a} < \left\{(b+1)\overline{S^b}\right\}^{a/b} \Big/ (a+1)$

の関係にあるときは，(4)を満足する解$\tilde{m}$は存在しないことを証明することができる．このような事態を避けるためには，aをなるべくbに近づけることが考えられるが，$a=b>0$としてしまえば，任意の$m>0$が(4)の解となり，これは無意味となる．そこで$a=b+\delta$，$a-b=\delta$とおき，$\delta>0$が十分0に近いとき，$O(\delta^2)=\Delta$と書いて

$$\left(\log\overline{S^a}\right)\Big/a = \left(\log\overline{S^b}\right)\Big/b + \delta\left\{-\log\overline{S^b} + \overline{S^b\log S^b}\Big/\overline{S^b}\right\}\Big/b + \Delta \ ,$$

$$G_0(m)/a = G_0(m)/b - \delta G_0(m)/b^2 + \Delta \ ,$$

$$G_a(m)/a = G_b(m)/b - \delta\left\{G_b(m) + (b/m)\psi\left((b+1)/m\right)\right\}\Big/b^2 + \Delta$$

の各式を(4)の両辺の自然対数をとった式に代入し，δに対してΔを無視すると，結局，次式

(6) $$G_0(m) - G_b(m) + (b/m)\psi\left((b+1)/m\right) = -\log\overline{S^b} + \overline{S^b\log S^b}\Big/\overline{S^b}$$

が得られる．ここにG_0，G_bは次式で定義し，

$G_b(m) = \log\Gamma\left((b+1)/m\right) \ (b \geq 0)$，

$\overline{S^b\log S} = \left(\sum_{i=1}^{n} s_i{}^b \log s_i\right)\Big/n$ とする．

注意1　(6)が本稿で提案する"極限モーメント法"の方程式である．この式で特に$b=m$とおき，$G_m(m) = G_0(m) - \log m$ に注意すると，mを推定するための最尤方程式が得られる(文献[3])．従って，(6)を満足する$b>0$と$m>0$の組$\left(\check{b},\check{m}\right)$の集合を$A$とおくと，最尤解$\hat{m}$が存在するとき，

(7) $(\hat{m},\hat{m}) \in A$

となり，(6)は最尤方程式を含む，更に一般的な方程式である．

注意2　(6)の左辺を$L_b(m)$とおくと，

$L_b'(m) < 0$，$L_b(m) \to \infty \ (m \to 0)$，

$$L_b(\infty) = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+1}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{b}{b+1}\right)^3 + \cdots \ ,$$

$\frac{\partial}{\partial b}L_b(m) > 0$　：(6)の右辺を$R(b)$とおくと，$R'(b)>0$を証明することができる．

注意3　与えられた$b>0$に対して，(3)から

$$E\left(\overline{S^b\log S}\right) = \frac{d}{db}\upsilon_b \equiv \upsilon_{b1} \ ,$$

$$E\left(\overline{S^b(\log S)^2}\right) = \frac{d^2}{db^2}\upsilon_b \equiv \upsilon_{b2} \ ,$$

を求めることができ，これらから(6)の解$\check{m}$のmに対する偏り$B\left(\check{m}\right)$と平均2乗誤差$MSE\left(\check{m}\right)$の漸近値を$b,c,m,n$の関数として与えることができる．これらを用いて$\check{m}$を改良し，最終的な推定値$m^{\#}$を求める．いま，$B_{11} = \upsilon_{2b,0}/\upsilon_{b0}{}^2 - 1$，

$B_{12} = \upsilon_{2b,1}/\upsilon_{b0}/\upsilon_{b1} - 1$，$B_{22} = \upsilon_{2b,2}/\upsilon_{b1}{}^2 - 1$，

$\mu_{b1} = \log C + \psi\left((b+1)/m\right)/m$ ，

$$\varphi_b(m) = \left\{\psi\left((b+1)/m\right) - \psi(1/m) - b(b+1)\psi'\left((b+1)/m\right)/m\right\}\Big/m$$

とおくと，nが十分大きいとき漸近的に

(8) $$nE\left\{\left(m^{\#}/m - 1\right)^2\right\} = \left[(1+b\mu_{b1})^2 B_{11} - 2(1+b\mu_{b1})b\mu_{b1}B_{12} + b^2\mu_{b1}{}^2 B_{22}\right]\Big/\varphi_b{}^2(m)$$

と評価される．シミュレーション結果はここでは省略．

引用文献

[1]阿部:"定常再生過程の一点における年令データによる故障特性推定法",日本OR学会1990年度秋季研究発表会アブストラクト集.

[2]阿部:"定常再生過程の一点における寿命または余命のデータによる故障特性推定法(Ⅱ)",日本OR学会1991年度秋季研究発表会アブストラクト集.

[3]Abe,S. :"Reliability estimation from current ages and/or residual life times of units at an arbitrary instant of stationary renewal process",Proc.APORS'91,Beijing U.P.,1992.

[4]橋本:"ある時点で稼働中のアイテムの寿命データを用いたワイブルパラメータの推定",東京理科大学1990年度修士論文(野中保雄教授指導).