1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

選択を伴った不完備情報の確率的逐次割当問題

中井　達 Tōru Nakai　　九州大学経済学部

1　序

一度に複数の値が観測できる確率的逐次割当問題を考える。逐次に出現する仕事を決められた期間にわたり観測する。それらの仕事の大きさは、独立かつ同一の分布に従う確率変数として表される。このとき、n 人の人間を n 個の仕事に割り当て総期待利得を最大にする。

状態空間が $\{0,1,2,\cdots\}$ で推移確率行列が $\mathbf{P}=(p_{ij})_{i,j=0,1,2,\cdots}$ の部分観測可能なマルコフ連鎖を考える。

このマルコフ連鎖の状態に依存する確率変数を観測し情報を得る。状態が i のときに観測できる期待値が有限な非負確率変数を X_i とおけば、この確率変数は $\Pr\{X_i \le x | Y_t = i\} = F_i(x)$ $(x \in \mathbf{R}, i, t \in \{0,1,2,\cdots\})$ で定まり、密度関数 $f_i(x)$ を持つとする。ここで Y_t は時刻 t でのマルコフ連鎖の状態を表す確率変数とする。一般の場合にも以下と同様の議論ができる。状態についての情報は、状態空間上の確率分布 $\mathcal{P}=(p_0,p_1,p_2,\cdots)$ $(p_i \ge 0, \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1)$ で表され尤度比順序を仮定する。

仮定 1 $\{X_i\}_{i=0,1,2,\cdots}$ に対し、$i \le j$ $(i,j=0,1,2,\cdots,n)$ かつ $x \le y$ のとき $f_j(x)f_i(y) \le f_j(y)f_i(x)$ とする。

仮定 2 $\mathcal{S}$ の $\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ に対し、$\mathcal{P} >_l \mathcal{Q}$ とは全ての i と j $(i \le j,\ i,j=1,2,\cdots)$ に対し $p_j q_i \ge p_i q_j$ が成立し、少なくとも一つの i と j の組み合わせに対し $p_j q_i > p_i q_j$ が成り立つ場合をとする。

部分観測可能なマルコフ連鎖の状態 i に依存した n 個の確率変数 $\{X_k\}_{k=1,\cdots,n}$ から値 $\{x_k\}_{k=1,\cdots,n}$ $(x_k \in R=(0,\infty), k=1,\cdots,n)$ を観測したとき、学習を行いその結果を $\overline{T(\mathcal{P},\mathbf{x})}$ と表す。ここで、$\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ とする。$f_j(\mathbf{x})$ はマルコフ連鎖の状態が j $(j=0,1,2,\cdots)$ のとき n 個の確率変数 $\mathbf{X}$ の同時分布関数とすれば、ベイズの定理を用いて事後情報 $\overline{T(\mathcal{P},\mathbf{x})}$ は次のようになる。

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\overline{T_j(\mathcal{P},\mathbf{x})} & = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{p_j f_j(\mathbf{x})}{\sum_{i=0}^{n} p_i f_i(\mathbf{x})} p_{ij}, \\
\overline{T(\mathcal{P},\mathbf{x})} & = (\overline{T_0(\mathcal{P},\mathbf{x})}, \overline{T_1(\mathcal{P},\mathbf{x})}, \overline{T_2(\mathcal{P},\mathbf{x})}, \cdots)
\end{array}
\right. \tag{1}
$$

定義 1 2つの k 個の観測値の組 $\mathbf{x},\mathbf{y} \in R^n$ に対し $x_{(i)} \le y_{(i)} (i=1,2,\cdots,k)$ のとき、またそのときに限り $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ と表す。$x_{(i)}$ と $y_{(i)}$ は k 個の標本の小さい方から i 番目の順序統計量とする。

補題 1 $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ を満たす任意の $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ に対し $f_j(\mathbf{y})f_i(\mathbf{x}) \ge f_i(\mathbf{y})f_j(\mathbf{x})$ $j < i$ $(i,j=1,2,\cdots)$ となる。

補題 2 $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ を満たす任意の $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ に対し $T(\mathcal{P},\mathbf{x}) \le_l T(\mathcal{P},\mathbf{y})$ が全ての $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ に対し成り立つ。

定理 1 $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ を満たす任意の $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ に対し $\overline{T(\mathcal{P},\mathbf{x})} \le_l \overline{T(\mathcal{P},\mathbf{y})}$ となる。$(\mathcal{P} \in \mathcal{S})$

補題 3 任意の $\mathcal{P},\mathcal{Q}$ に対し、$\mathcal{P} \ge_l \mathcal{Q}$ なら $T(\mathcal{P},\mathbf{x}) \ge_l T(\mathcal{Q},\mathbf{x})$ である。$(\mathbf{x} \in R^n)$

定理 2 任意の $\mathcal{P},\mathcal{Q}$ に対し、$\mathcal{P} \ge_l \mathcal{Q}$ なら $\overline{T(\mathcal{P},\mathbf{x})} \ge_l \overline{T(\mathcal{Q},\mathbf{x})}$ である。$(\mathbf{x} \in R^n)$

2　選択を伴った部分観測可能な確率的逐次割当問題

非負数列 $\{d^i_{N,\mathcal{P},m}\}_{i\ge1}$, $\{d^i_{N,\mathcal{P},m}(n)\}_{i\ge1}$ と $\{e^i_{N,\mathcal{P},m}\}_{i\ge1}$ を帰納的に定義する。$(1 \le j, 0 \le n \le m)$

$$
d^i_{N,\mathcal{P},m} = \sum_{n=0}^{m} d^i_{N,j,m}(n) p_{N,m}(n) \tag{2}
$$

$$d^i_{N,\mathcal{P},m}(n) = \mathrm{E}[d^i_{N,\mathcal{P},m}(n;\mathbf{X})] \tag{3}$$

$$d^i_{N,\mathcal{P},m}(n;\mathbf{x}) = U_n(e^i_{N-1,\overline{T(\mathcal{P},\mathbf{X})},m-n}, e^{i-1}_{N-1,\overline{T(\mathcal{P},\mathbf{X})},m-n}|1,\infty) \tag{4}$$

$$d^i_{N,\mathcal{P},m}(0) = e^i_{N-1,\overline{\mathcal{P}},m} \tag{5}$$

ここで $e^i_{N-1,\mathcal{P},m} = d^i_{N-1,\overline{T(\mathcal{P},\mathbf{X})},m}$ $(N \geq 2)$, $\overline{\mathcal{P}} = (\overline{p}_1, \overline{p}_2, \cdots)$, $\overline{p}_s = \sum_t^\infty p_s p_{st1}$, $d^0_{N,\mathcal{P},m} = d^0_{N,\mathcal{P},m}(n) = \infty$ および $d^i_{0,\mathcal{P},0} = 0$ とする。

逐次に出現する仕事を N期間に観測し、それらの仕事は一様に出現する。。一方、n 人の人間を雇っていて、それぞれの能力を $p_1, p_2 \cdots, p_n$とする。$(1 \geq p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n \geq 0)$ このとき、n 個の仕事に n 人の人間を割り当て総期待利得を最大にする。いったん割り当てられた人間は再び割り当てられることはない。このとき、$(N,\mathcal{P};p_1,\cdots,p_n)$ を問題の状態と呼び 、$P_{N,\mathcal{P}}(p_1,\cdots,p_n)$ で表す。$x_{(1)},\cdots,x_{(k)}$を k個の確率変数 $X_1,\cdots,X_k$ の観測値 $x_1,\cdots,x_k$の順序統計量とする。$(x_{(1)} \geq \cdots \geq x_{(k)}$、$X_{(1)} \geq \cdots \geq X_{(k)})$

この問題は観測する n 個の観測値に n 個の $\{p_1,\cdots,p_n\}$ を割り当てたとき、それらの利得の総和を最大にする最適政策と、そのもとで最適に振る舞ったときの総期待利得を求める。ここで、大きさ x の仕事に、能力が p である人間が当たれば利得は px とする。

このとき、最適に振る舞ったときに得られる総期待利得を $v_{N,\mathcal{P};p_1,\cdots,p_n}$とすると、

$$v_{N,\mathcal{P};p_1,\cdots,p_n} = \sum_{k=0}^{n} v_{N,\mathcal{P};p_1,\cdots,p_n}(k) p_N(k) \tag{6}$$

$$v_{N,\mathcal{P};p_1,\cdots,p_n}(k) = \mathrm{E}[v_{N,\mathcal{P};p_1,\cdots,p_n}(k;X_{(1)},\cdots,X_{(k)})] \tag{7}$$

$$v_{N,\mathcal{P};p_1,\cdots,p_n}(k;x_{(1)},\cdots,x_{(k)}) = \max_{\{\bar{p}_1,\cdots,\bar{p}_k\}\subset\{p_1,\cdots,p_n\}} \max_{\sigma\in S_k}\{\sum_{j=1}^{k} \bar{p}_{\sigma(j)} x_{(j)} + v_{N-1,\overline{T(\mathcal{P},\mathbf{X})};p^*_1,\cdots,p^*_{n-k}}\} \tag{8}$$

となる。ただし、$\{p^*_1,\cdots,p^*_{n-k}\}$ は、n 個の $\{p_1,\cdots,p_n\}$ の中から、この期で割り当てられた k個の $\{\bar{p}_1,\cdots,\bar{p}_k\}$ を除いた残りの $n-k$個である。$(p^*_1 \geq \cdots \geq p^*_{n-k}, \bar{p}_1 \geq \cdots \geq \bar{p}_k)$

定理 3 確率的逐次割当問題の状態が $(N;p_1,\cdots,p_n)$ のとき、$x_{(1)},\cdots,x_{(k)}$を k個の確率変数の観測値とする。いま $\{x_{(i)}\}_{i=1,\cdots,k}$および $\{d^i_{N-1,\mathcal{P},n-k}\}_{i=1,\cdots,n-k}$の n 個の値を合わせて大きさの順に並べ替えたものを $\{b_j\}_{j=1,2,\cdots,n}$とする。このとき、$b_j = x_{(i)} (j=1,\cdots,n, i=1,\cdots,k)$ ならば、$x_{(i)}$を j番目の p_jに割り当てることが最適である。また、$b_j = d^i_{N-1,\mathcal{P},n-k} (j=1,\cdots,n, i=1,\cdots,n-k)$ であれば、この jに対応する p_jには、この期では割り当てないことが最適である。

定理 4 $v_{N,\mathcal{P};p_1,\cdots,p_n}$および $v_{N,\mathcal{P};p_1,\cdots,p_n}(k)$ は、次のようになる。

$$v_{N,\mathcal{P};p_1,\cdots,p_n} = \sum_{i=1}^{n} p_i d^i_{N,\mathcal{P},n} \tag{9}$$

$$v_{N,\mathcal{P};p_1,\cdots,p_n}(k) = \sum_{i=1}^{n} p_i d^i_{N,\mathcal{P},n}(k) \tag{10}$$

参考文献

[1] T. Nakai, The Problem of Optimal Stopping in a Partially Observable Markov Chain, *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 45, 425–442, 1985.

[2] T. Nakai, An Optimal Selection Problem with a Random Number of Applicants per Period, *Operations Research*, vol. 34, 478–485, 1986.

[3] T. Nakai, A Sequential Stochastic Assignment Problem in a Partially Observable Markov Chain, *Mathematics of Operations Research*, vol. 11, 230–240, 1986.