1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

最小滞在時間問題 (1) — 定式化および制約の改善 —

01107880　防衛大学校　*片岡　靖詞　KATAOKA Seiji
早稲田大学　徳永　康二　TOKUNAGA Koji

1　問題の定義

学生 m 人，教官 n 人がおり，各学生には複数の卒論指導教官がいる．卒論発表会では，各教官は，最初の担当学生の発表開始から最後の担当学生の発表終了まで滞在しなければならない．このとき，学生の発表順序をスケジュールし，教官の滞在時間の総和を最小化する問題を**最小滞在時間問題** (Minimum Stay Problem : MSP) と呼ぶことにする．

スケジュール前

学生	教官 1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	0	1
4	0	0	1	0
5	1	0	1	0
6	0	1	1	1
7	1	0	0	1
8	0	0	1	1
9	0	1	0	1
10	1	1	1	0
滞在時間	10	9	7	7

スケジュール後

学生	教官 1	2	3	4
1	1	0	0	0
4	0	0	1	0
5	1	0	1	0
10	1	1	1	0
7	1	0	0	1
6	0	1	1	1
8	0	0	1	1
9	0	1	0	1
2	0	1	0	0
3	0	0	0	1
滞在時間	5	6	6	6

図 1: 問題の例

本研究では，MSP を 0-1 混合整数計画問題として定式化する．さらに線形計画緩和を解いて下界値を上昇させるために付加する制約と，問題を縮小するための変数の固定方法について説明する．

2　定式化

学生の集合を M, 教官の集合を N, 時限の集合を K とする．問題の定義から明らかなように，$|M| = |K| (= m)$ である．問題を定式化するに先立って，入力データ a_{ij} および変数 x_{ik}, y_{jk}, z_{jk} を次のように定義する．

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{学生 } i \text{ が教官 } j \text{ の指導を受ける} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$x_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{学生 } i \text{ が時限 } k \text{ に発表する} \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (1)$$

$$y_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{教官 } j \text{ の滞在開始以降} \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (2)$$

$$z_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{教官 } j \text{ の滞在終了以前} \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (3)$$

変数 y_{jk}, z_{jk} は，それぞれ各教官の滞在開始，滞在終了を決定するために導入した 0-1 変数である．変数 y_{jk} は，時限が進む ($k = 1, \ldots, m$) につれて非減少であり，滞在を開始する以前は 0，滞在を開始してからは 1 をとるようにする．同様に変数 z_{jk} は，時限が進むにつれて非増加であり，滞在を終了する以前は 1，滞在を終了してからは 0 をとるようにする（図 2）．

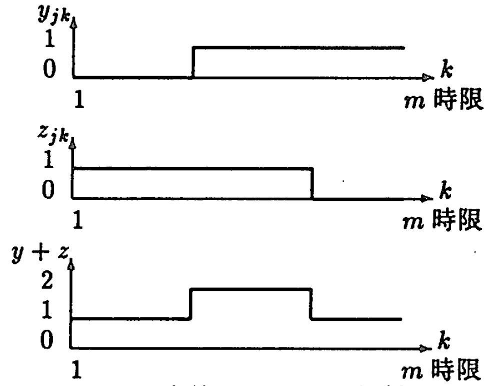

図 2: 変数 y および z の役割

図 2 からも分かるように，$y_{jk} + z_{jk}$ の値は，教官 j が滞在をしている間は 2，それ以外は 1 をとる．したがって，教官 j の滞在時間は，$\sum_{k=1}^{m}(y_{jk} + z_{jk}) - m$ で表すことができる．以上より，次の定式化を考えることができる．

$$\min \quad \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{m}(y_{jk} + z_{jk}) - m\right] \quad (4)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k=1}^{m} x_{ik} = 1 \qquad \forall\, i \in M \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} = 1 \qquad \forall\, k \in K \quad (6)$$

$$y_{jk} \geq \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ik} \qquad \forall\, j \in N,\ k \in K \quad (7)$$

$$y_{jk} \geq y_{j,k-1} \qquad \forall\, j,\ k (\geq 2) \quad (8)$$

$$z_{jk} \geq \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ik} \qquad \forall\, j \in N,\ k \in K \quad (9)$$

$$z_{jk} \geq z_{j,k+1} \qquad \forall\, j,\ k (\leq m-1) \quad (10)$$

$$(1), (2), (3)$$

前述のように，(4) 式の最小化のもとでは，(7) 式により教官 j が滞在を開始したときに $y_{jk}=1$ となり，(8) 式により，それ以後下がることはない．同様に (9), (10) 式がある．ここで，x の 0-1 性さえ保たれていれば，(7) および (9) 式の右辺 $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_{ik}$ は，0-1 の値しかとらないので，y および z 型の変数は線形緩和できることに注意する．さらには，目的関数 (4) の最小化により，y および z 型の変数は上界制約がなくても 1 に抑えることができる．したがって，本問題は次の (4)-(11) 式により 0-1 混合整数計画問題として定式化ができる．

$$x_{ik} \in \{0,1\}, y_{jk} \geq 0, z_{jk} \geq 0 \qquad \forall\, i,j,k \tag{11}$$

3 制約の付加と変数の固定

前節で示した定式化において，(11) における x 型変数の 0-1 条件を線形緩和して解いても，有効な下界値を得ることができない (表 1)．ここでは，さらに制約式を加えることによる下界値の改善と，変数の固定による問題の縮小を図る．

3.1 各教官の担当学生数に注目した制約

各教官の滞在時間は，少なくとも担当する学生の数以上である．したがって，次のような制約を考えることができる．

$$\sum_{k=1}^{m}(y_{jk}+z_{jk}) \geq \sum_{i=1}^{m} a_{ij} + m \qquad \forall\, j \tag{12}$$

だが，この制約だけでは，入力データ a_{ij} の 1 の数より高い下界が得られる可能性が低い (表 1)．

3.2 各時限に必要な教官数に注目した制約

滞在を開始と終了とに分けて，ここでは開始を決定する y 型の変数についてのみ焦点を絞って議論する．

教官の部分集合を $S \subseteq N$ とする．また集合 S に含まれる教官で担当できる学生の数を $f(S)$ と定義する．このとき，s 人の教官で担当できる最大学生数 $t(s)$ は，

$$t(s) = \max\{f(S) | S \subseteq N, |S| = s\}$$

で与えられる (図 3)．このとき $t(s)$ は，時限 $t(s)$ までであれば，s 人の教官で担当できることを示している．また，明らかなように，$t(0)=0$, $t(n)=m$ である．このとき，次の制約を考えることができる．

$$\sum_{j=1}^{n} y_{jk} \geq s \qquad \forall\, s,\ t(s-1) < k \leq t(s) \tag{13}$$

z 型の変数においても，同じ議論が適用できる．

このとき，$t(s)$ $(s=1,\dots n)$ を求める手間は $O(2^m)$ 程度になるが，教官の数が少なければ (20 程度までなら) 大した労力ではない．

$f(S)$	$t(s)$
$f(0000)=0$	$t(0)=0$
$f(1000)=1$, $f(0100)=1$	
$f(0010)=1$, $f(0001)=1$	$t(1)=1$
$f(1100)=2$, $f(1010)=3$, $f(1001)=3$	
$f(0110)=2$, $f(0101)=3$, $f(0011)=3$	$t(2)=3$
$f(1110)=5$, $f(1101)=5$	
$f(1011)=6$, $f(0111)=6$	$t(3)=6$
$f(1111)=10$	$t(4)=10$

図 3: 図 1 の例による各 $f(S)$ と $t(s)$ の値

3.3 変数の固定

制約式 (13) において，特に $s=n$ のときは，

$$y_{jk} = 1 \qquad \forall\, j,\ t(n-1) < k \leq m$$

と等価であり，これは問題を縮小する役目も果たしている．この性質を拡張するため，教官 j の最遅滞在開始時限 $\bar{k}_j = m - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} + 1$ を考える．このとき，上記の式は $t(n-1)+1 = \max_j \bar{k}_j$ となっている．時限 $\bar{k}_j$ 以降，教官 j は滞在を開始していなければならないので，

$$y_{jk} = 1 \qquad \forall\, j,\ \bar{k}_j \leq k \leq m \tag{14}$$

とすることができる．この (14) 式により，いくつかの変数を固定し，問題を縮小することができる．

上記の議論は，z 型の変数においても全く同様である．

4 計算機実験

学生数 10, 教官数 4 の例題を用いて，各制約および変数の固定の効果を確かめた．小規模な例題ではあるが，制約式 (4)-(11) では，変数 180 (うち 0-1 変数 100)，制約式の数 172 にもなる．

表 1: 線形緩和による下界値比較

例 題	1	2	3	4
a_{ij} の 1 の数	20	22	23	18
(4)-(11)	0	4	6	−4
(4)-(11),(12)	20	22	23	18
(4)-(11),(12),(13),(14)	23	24.3	26	20
最適値	26	26	28	23

制約の追加と変数の固定により，入力データ中の 1 の総数よりはよい下界値を得ることができたが，まだ下界値として十分高いとはいえず，このまま分枝限定法などを適用するには難がある．最小滞在時間問題のように，線形緩和により得られる下界値が極端に低い問題においては，線形緩和以外にも，問題の構造を利用した下界値算出方法の検討も重要であろう．