1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

On Three Alternating Hamiltonian Problems in Two-Edge-Colored Complete Graphs

02501830 東京理科大学 ＊樋口圭司 HIGUCHI Keiji
01206100 防衛大学校 猿渡康文 SARUWATARI Yasufumi
01401450 東京理科大学 沼田一道 NUMATA Kazumiti

1 はじめに

あらかじめ枝に色が付けられた完全グラフを辺彩色完全グラフ (edge-colored complete graph) と呼ぶ．辺彩色完全グラフにおいて, 任意の2点間のパスで, 隣接する任意の2つの枝の色が異なるならば, そのパスを交互パス (alternating path) という．交互パスがグラフのすべての点をちょうど1度ずつ通るときそのパスを, 交互ハミルトンパス (alternating Hamiltonian path) という．同様に, 任意の隣接する2枝が異なる色であるサイクルを交互サイクル (alternating cycle) といい, 特にそのサイクルがグラフのすべての点をちょうど1度ずつ通るとき交互ハミルトンサイクル (alternating Hamiltonian cycle) という．

本稿では, 各枝に付加された色が2色からなる2-辺彩色完全グラフに対して, (1) 交互ハミルトンサイクル, (2) 交互ハミルトンパス, 及び (3) 特定の点を始点とする交互ハミルトンパスがそれぞれ存在するための必要十分条件を示す．

2 定義

辺彩色完全グラフを $K_n^c = (V, E, C)$ と表す．ただし, Vは点集合, Eは枝集合, Cは色集合であり, $|V| = n$, $C = \{red, blue\}$ とする．

辺彩色完全グラフ K_n^cが与えられたとき, 点集合を V, 枝集合をそれぞれ red 枝のみ, blue 枝のみとする部分グラフを G_r, G_bと表す．

点$x(\in V)$に接続する red 枝 (blue 枝) の本数を $r(x)\,(b(x))$ と表す．また, 点の部分集合 $X(\subset V)$ に含まれる点に接続する red 枝の合計を $r(X)$,blue 枝の合計を $b(X)$ と表す．すなわち, $r(X), b(X)$ は $r(X) = \sum_{x\in X} r(x)$, $b(X) = \sum_{x \in X} b(x)$ である．

3 交互ハミルトンサイクルの存在性

定理 3.1 K_n^cが交互ハミルトンサイクルをもつための必要十分条件は, 次の (α) かつ (β) を満たすことである．

(α) G_r, G_bは完全マッチングをそれぞれもつ

(β) $n \geq 8$ のとき, 全ての $k(2 \leq k \leq (n/2)-2)$ に対して, $\{r(x_1)+r(x_2)+\cdots+r(x_k)\}+\{b(x_n)+b(x_{n-1})+\cdots+b(x_{n-k+1})\} > k^2$ を満たす．ただし, $r(x_1) \leq \cdots \leq r(x_n)$ である．

本稿では, この定理に対する Bánkfalvi ら [1] のそれとは異なるシンプルな証明を与えている．ここでは紙面の都合上省略する．

4 交互ハミルトンパスの存在性

定理 4.1 K_n^cが交互ハミルトンパスをもつための必要十分条件は, 次の $(\alpha)(\beta)(\gamma)$ のいずれかを満たすことである．

(α) n が偶数のとき, G_r, G_bは完全マッチングをそれぞれもつ

(β) n が偶数のとき, G_r, G_bのどちらか一方は完全マッチングをもち, もう一方は最大マッチングの枝数が $(n/2)-1$ を満たす

(γ) n が奇数のとき, G_r, G_bのどちらも最大マッチングの枝数が $(n-1)/2$ を満たす

本稿では, この定理に対する Benkouar ら [2] の証明とは異なる証明を与えているが, ここでは紙面の都合上省略する．

5 与えられた1点を始点とする交互ハミルトンパスの存在性

本稿では, 辺彩色完全グラフにおいて, 与えられた1点 s を始点とする交互ハミルトンパスが存在するための必要十分条件を導出している．

定理 5.1 n が偶数である K_n^cが与えられているとする．K_n^cが, 任意の *1* 点 s を始点とする交互ハ

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

ミルトンパスをもつための必要十分条件は，次の $(\alpha)(\beta)(\gamma)$ のいずれかを満たすことである．
(α) G_r, G_bは完全マッチングをそれぞれもつ
(β) G_rは完全マッチング，G_bは枝数 $(n/2)-1$ の最大マッチングをもち，かつ，$n \geq 6$ のとき全ての $k(1 \leq k \leq (n/2)-2)$ において，$\{r(x_1)+r(x_2)+\cdots+r(x_k)\}+\{b(x_n)+b(x_{n-1})+\cdots+b(x_{n-k+1})\} > k^2$ を満たす．ただし，$x_1 = s$, $r(x_2) \leq \cdots \leq r(x_n)$ である
(γ) (β) の *red* と *blue* を交換した条件

(β) の条件の後半部分は，次の (β') に置き換えることができる．
$(\beta')X, Y \subset V$, $X \cap Y = \emptyset$, $s \in X$, $|X| = |Y| = k$ を満たす任意の点集合 X, Yに対して，$n \geq 6$ のとき全ての $k(1 \leq k \leq (n/2)-2)$ において，$r(X)+b(Y) > k^2$ を満たす．

定理 5.2 nが奇数である K_n^cが与えられているとする．K_n^cが，任意の *1* 点 s を始点とする交互ハミルトンパスをもつための必要十分条件は，G_r, G_b がどちらも枝数 $(n-1)/2$ の最大マッチングを持ち，かつ，次の $(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)$ のいずれかを満たすことである．
(α) sに接続する枝は全て同じ色
(β) G_r, G_bどちらにも s を含まない最大マッチングがある
(γ) G_rの任意の最大マッチングに sが含まれ，G_b に sを含まない最大マッチングがあり，かつ，$n \geq 7$ のとき全ての $k(1 \leq k \leq (n-5)/2)$ において，$\{r(x_1)+r(x_2)+\cdots+r(x_k)+r(x_{k+1})\}+\{b(x_n)+b(x_{n-1})+\cdots+b(x_{n-k+1})\} > k(k+1)$ を満たす．ただし，$x_1 = s$, $r(x_2) \leq \cdots \leq r(x_n)$ である．
(δ) (γ) の *red* と *blue* を交換した条件

ここでは偶数の場合についてのみ証明する．
Proof: 証明は，以下の場合に分けておこなう．
(1) G_r, G_bどちらも完全マッチングをもつとき．
(2) 一方が (G_rとする) 完全マッチングをもち，他方 (G_b) は枝数 $(n/2)-1$ の最大マッチングをもつとき．
(3) (1)(2) 以外．

(1) の場合は，4 節より明らかに，s を始点とする交互ハミルトンパスが存在する．
(2) のもとで，s を始点とする交互ハミルトンパスが存在すると仮定すると，G_bには s を含まない最大マッチングが存在しなければならない．よって，G_bのどのような最大マッチングも必ず s を含むならば，s を始点とする交互ハミルトンパスは存在しない．
次に，(2) のもとで，G_bに s を含まない最大マッチングがあると仮定する．
このとき，G_rの完全マッチングと s を含まない G_b の最大マッチングを合わせると一つの交互パスといくつかの交互サイクルができる．この交互パスと交互サイクルを可能な限り一つの交互パスに結合していっても，一つ以上の交互サイクルは結合できない．交互パスの点を一つおきに点集合 X, Y に分けると，Xの点と任意の交互サイクルとの間の枝や XX間の枝はすべて blue となり，Yの点と任意の交互サイクルとの間の枝や YY間の枝はすべて red となる．このような点集合 X, Yにおいて は，$r(X)+b(Y) = k^2$ となり (β') を満たさない．よって，任意の kにおいて (β') を満たすならば s を始点とする交互ハミルトンパスが存在する．
次に，(2) のもとで，G_bに s を含まない最大マッチングがあると仮定する．
G_bは完全マッチングをもたないので，交互ハミルトンパスが存在するならば red 枝から始まらなくてはならない．$r(X)+b(Y) = k^2$ となる点集合 X, Yが存在すると仮定すると，s を始点として交互パスとなるように点をたどると，s に接続している red 枝の端点は Yの点のみであり，Yに接続している blue 枝の端点は Xの点のみである．よって，交互パスになるように点をたどると，X, Y以外の点には到達できない．故に，ある kが (β') を満たさないならば s を始点とする交互ハミルトンパスが存在しない．

(3) の場合は，定理 4.1 より交互ハミルトンサイクルは存在しない． □

参考文献

[1] M.Bánkfalvi, Z.Bánkfalvi, "Alternating Hamiltonian Circuit in Two-Edge-Coloured Complete Graphs," *Proceeding Colloq. Tihany*, Academic Press, New York, pp.11-18, (1968).

[2] A.Benkouar, Y.G.Manoussakis, V.Th.Paschos, R.Saad, "On the Complexity of some Hamiltonian and Eulerian Problems in Edge-Colored Complete Graphs," Technical report, (1991).

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．