1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

容量付きネットワークのスリム化について
On Slimming of a Capacitated Network

02701530 中央大学 *山口雅弘 YAMAGUCHI Masahiro
01000850 中央大学 伊理正夫 IRI Masao

1 はじめに

第二著者が最近提案している制御不能流の理論 [1] は，既存のネットワーク理論に，“一旦流したものは後から打ち消しできない” という制限をかけたものである．そこでは今までとは違った様々な問題や概念が発生する．それらの研究もいくつか開始されている [6]．今回は，第一著者が無有向閉路ネットワークの最小極大流 [3] の解法の研究を Ning の手法 [7] 等をもとに進めた過程 [8] で著者等が到達した，ネットワーク理論の新しい概念について，その定義，性質，意味，応用可能性を論じてみる．

2 制御不能流理論

まず，制御不能流理論における基礎概念を述べる．(詳しくは [3] .)

2 端子ネットワーク $N_{s,t}=(V,E,\partial^+,\partial^-,s,t,c,\xi)$ (V : 点集合, E : 枝集合, $\partial^+ : E\rightarrow V$, $\partial^- : E\rightarrow V$ (接続関係), $s\in V$ (入口), $t\in V$ (出口), $c : E\rightarrow \mathbf{R}_+$ (容量), $\xi : E\rightarrow \mathbf{R}$ (フロー)) の上の**制御不能流** (uncontrollable flow, 単に **u-flow** と呼ぶ) とは，s から t への初等的な道に沿っての単位流，あるいはそれらの正係数の一次結合のことである．(一般の 2 端子ネットワーク上の流れは，必ずしも制御不能流とはならない．そうなるかどうかの判定問題は NP-完全である [5]．全ての無閉路 2 端子ネットワークの入口から出口への流れは常に u-flow.)

2 端子**実行可能**制御不能流 ξ (2 端子流 ξ で $\forall e\in E : 0\leq\xi(e)\leq c(e)$ を満たすもの) において，もしどんな 2 端子制御不能流 ξ' ($\neq 0$) を選んでも $\xi+\xi'$ が実行可能でない時 ξ は**極大流**であるという．総流量最小の極大流を**最小極大流**という．また，s-t カット $\mathrm{cut}(V_1,V_2)=\{e\mid\partial^+e\in V_1,\ \partial^-e\in V_2\}$ ($s\in V_1$, $t\in V_2$, $V_1\cap V_2=\emptyset$, $V_1\cup V_2=V$) は，$\xi(e)=c(e)$ ($\forall e\in\mathrm{cut}(V_1,V_2)$) であるような 2 端子実行可能制御不能流 ξ が存在する時**ボトルネックカット**という．

ボトルネックカットを飽和する流れは必ず極大流である．また，応用上興味のあるのは最小極大流 (または，最小ボトルネックカット) を求めることであるが，この問題が一般に NP-完全であることは知られている [3]．

3 スリム化

今，$N_{s,t}$ の**拡大ネットワーク** $\widetilde{N}=(\widetilde{V},\widetilde{E},\widetilde{\partial}^+,\widetilde{\partial}^-,\widetilde{c},\widetilde{\xi})$ ($\widetilde{V}=V$, $\widetilde{E}=E\cup\{e_0\notin E\}$, $\widetilde{\partial}^+|_E=\partial^+$, $\widetilde{\partial}^+|_E=\partial^-$, $\widetilde{\partial}^+e_0=t$, $\widetilde{\partial}^-e_0=s$, $\widetilde{c}|_E=c$, $\widetilde{\xi}|_E=\xi$, $\widetilde{c}(e_0)=\infty$, $\widetilde{\xi}(e_0)=\|\xi\|_{s,t}=N_{s,t}$ における s から t への総流量) を考える．

[定義 1] **無閉路** 2 端子ネットワーク $N_{s,t}$ の拡大ネットワーク $\widetilde{N}$ において，枝 $e\in E$ に関して∂^-e から ∂^+e への最大流 $\check{c}(e)$ が定義できるが，この値を e の新しい容量とすることを e に関する $N_{s,t}$ の**局所枝最適化**という．

[定義 2] $N_{s,t}$ において全ての枝の容量を $c'(e)=\min(c(e),\check{c}(e))$ でおきかえることを $N_{s,t}$ のスリム化 (slimming) と呼び，スリム化により得られるネットワークを $N'_{s,t}$ で表す．また，$\check{c}(e)\leq c(e)$ (したがって $c'(e)\leq c(e)$) であるような枝 $e\in E$ に対して，$c(e)$ を $c''(e)=c(e)$ より大きい任意の値で置き換えることを $N_{s,t}$ の肥大化 (fattening) と呼び，そうして得られるものを $N''_{s,t}$ で表す．

4 考察

スリム化の物理的な意味は「余計な枝容量を削り取る」ことである．また,「フローの実行可能性に関しては，もとのネットワークとスリム化 (あるいは肥大化) したネットワークは等価な性質を持つ」．通常の最大流問題等についてももちろんこの等価性は成り立つ．

スリム化は無閉路 2 端子ネットワークに対しては容易に実行できるが，有向閉路がある場合スリム化の定義そのものも曖昧になるし，算法的にも困難が生じる．2 端子でないネットワーク，すなわち，容量付きネットワークの上の制御不能循環流については，スリム化の定義は常に可能で，有効な算法が存在する．

線形計画法の言葉で述べれば，スリム化は無効な容量制約をぎりぎり有効にすることであり，肥大化はそれをますます無効にすることにすぎないが，ネットワークの設計という観点から眺めてみるのも無意味ではなかろう．このような，ネットワークの設計定数に関するネットワークの特性の “感度” を調べることは，旧い問題ではあるが，常に重要なことであろう．

5 例

スリム化の制御不能流理論への応用例として，図 1 のネットワークのボトルネックカットを考える．図 1 のネットワークをスリム化すると，図 2 のようになる．このとき，スリム化によって容量を減らされた枝 e_1, e_4, e_5, e_7, e_8 は，ボトルネックカットをなす枝の候補とはなりえない．

単に，任意の枝に関して局所枝最適化の手続きを適用するとどうなるであろうか．図 2 に関してこれを行うと，図 3 のようになる．このネットワークにさらに局所最適化の手続きを施しても容量の値は変わらない (**収束状態**)．ところが，図 4 の左側のネットワークでは手続きを繰り返すと容量が無限に大きくなり (**発散状態**)，右側のネットワークでは振動する (**振動状態**)．

6 おわりに

今回は，容量付きネットワークのスリム化の概念をを提案し，その意味やいくつかの性質について検討を行った．応用上の意義などまだ調べるべきことは多い．また，スリム化を制御不能流理論の一分野と位置づけて，理論の発展につなげることも期待される．

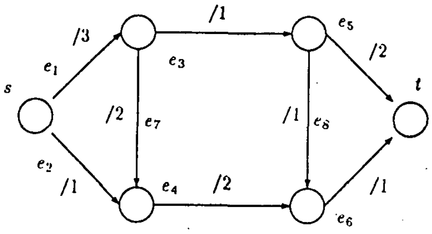

図 1　2 端子ネットワーク $N_{s,t}$ の例
(辺 e の側の記号は $\xi(e)/c(e)$)

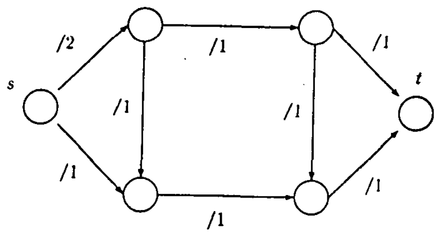

図 2　$N_{s,t}$ のスリム化ネットワーク $N'_{s,t}$

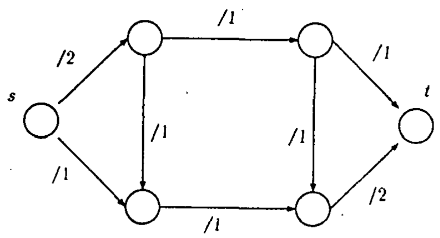

図 3　任意の枝に関する局所枝最適化ネットワーク

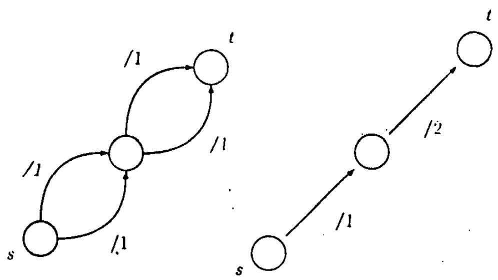

図 4　別のネットワークの例

参考文献

[1] 伊理正夫: 制御不能流の理論と応用 (Theory of uncontrollable flow and its application). **1994 年度日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会予稿集**, pp.63–64.

[2] 伊理正夫 他: 演習グラフ理論．コロナ社, 1983.

[3] Masao Iri: *An Essay in the Theory of Uncontrollable flows and Congestion.* TRISE (Technical Report on Information and System Engineering) 94–03, Department of Information and System Engineering, Faculty of Sience and Engineering, Chuo University, September 1994.

[4] Masao Iri: *Network Flow, Transportation and Scheduling — Theory and Algorithms.* Academic Press, New York and London, 1969.

[5] Tomomi Matsui: Is a given flow uncontrollable?, *IEICE Trans. Fundamentals,* Vol.E79–A, No.4 (1996), pp.xx–xx.

[6] 永井正幸: 制御不能流の実証的な検封と道路交通への応用可能性．筑波大学大学院経営·政策科学研究科修士論文, 1995.

[7] Xuanxi Ning: Research on the blocking flow in a transportation network. *Transactions of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics,* Vol.11, No.2 (1994), pp.215–223.

[8] 山口雅弘: 2 端子実行可能制御不能流最小極大流の解法の研究．中央大学情報工学科卒業論文, 1996.