区間解析による多目的最適化

1007884　京都産業大学　市田浩三　ICHIDA Kozo

１．はじめに

工学や経営科学に現れる非線形最適化問題の中でも、目的関数が多峰性である場合に、その大域的最適解を求めることは困難な問題である[1]。近年、区間解析を利用して、この大域的最適解を求める方法が開発されてきている[2]。区間解析は定数、変数、関数等を幅を持った区間として扱い[3]、変数領域を順次分割して各部分領域における関数値の上限と下限を評価し、最適解を含む可能性のない領域を捨てていくことにより、最大値又は最小値を求める方法である。区間解析の特徴は、常に、大域的最適解(複数個あればそのすべて)を厳密な誤差限界とともに求めることができることである。このため自己検証的算法と呼ばれることもある。さらに、その収束を速め解の精度を上げるために、ニュートン法を含む種々の方法が開発されている[4]。

しかし、最適化問題の中には、目的関数が複数個存在し、それらが互いに競合する場合が少なくない[5]。この問題は多目的最適化問題と呼ばれ、何らかの方法で目的関数をバランスさせることが必要になる。多目的最適化問題(以下最小値を求める場合を考える)は次のように定式化される。

$$\text{Minimize } f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)), \quad \text{subject to } x \in W = \{x \in E^n \mid g(x) \leqq 0\}. \qquad (1)$$

ここで、$x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$はｎ次元決定変数ベクトル、$f(x)=(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x))$はｋ次元目的関数ベクトル、$g(x)=(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_t(x))$はｔ次元制約関数ベクトルである。

一般に、すべての$x \in W$に対して　$f(x^*) \leqq f(x)$　となる完全最適解　x^*は存在しないので、ある目的関数の値を改善するためには少くとも他の１つの目的関数の値を改悪せざるを得ないような、パレート最適解を求めるのが普通である。

２．多目的最適化法

多目的最適化に対しては、次のような手法が知られている[5,6]。

(1)重み係数法　多目的最適化問題の複数個の目的関数の重みつき総和を単一の目的関数として最小化する方法である。

(2)ε制約法　複数個の目的関数のうちの１つのみを目的関数とし、他の目的関数に上限値を設定して解く方法である。

(3)ミニマックス法　次の形の最適化問題

$$\text{Minimize } \max(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)), \quad \text{subject to } x \in W \qquad (2)$$

あるいは等価的に

$$\text{Minimize } x_0, \quad \text{subject to } f_j(x) \leqq x_0 \ (j=1, 2, \ldots, k) \text{ and } x \in W \qquad (3)$$

を解く方法である。

(4)目標計画法　意思決定者が各目的関数に対する目標値を設定することができる場合に、目標値にできるだけ近づけるような解を求める方法である。

３．区間解析によるミニマックス法

以下、$X, F_j (1 \leqq j \leqq k), G_s (1 \leqq s \leqq t)$をそれぞれ$x, f_j, g_s$の区間関数とし、$\Lambda$を$X$の部分領域(以下領域と呼ぶ)とする。式(3)に対するLagrange関数

$$L = x_0 + \sum_{j=1}^{k} x_{n+k+j}(f_j(x) - x_0 + x_{n+j}^2) + \sum_{s=1}^{t} x_{n+2k+t+s}(g_s(x) + x_{n+2k+s}^2) \qquad (4)$$

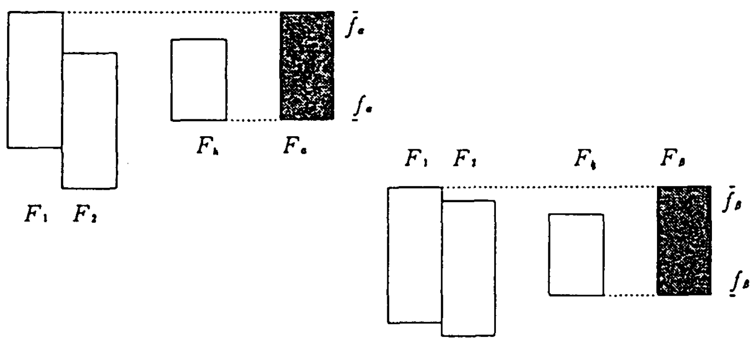
はC^2であるとし、$D=\det(\{\partial^2 L / \partial x_i \partial x_j\})(i, j=0, 1, \ldots, n+2k+2t)$とする。アルゴリズムは次の通りである。

(１):解を含む原領域を順次分割してゆく。残っている領域群の中で最大の辺を持つ領域を取り出し、その最大辺を２等分して２つの領域に分ける。そして、新しく分割された領域について、次のチェックを行う。

(2)：2つの領域A_αとA_βを考える。A_αにおける各目的関数の区間関数値を$F_j=[\underline{f}_j, \overline{f}_j]$ $(1 \leqq j \leqq k)$とする。図において

$$F_\alpha = [\max \underline{f}_j, \max \overline{f}_j] \ (1 \leqq j \leqq k) = [\underline{f}_\alpha, \overline{f}_\alpha] \qquad (4)$$

はA_αにおける各目的関数の上限の最大値と下限の最大値をそれぞれ上限と下限とする区間であり、$F_\beta=[\underline{f}_\beta, \overline{f}_\beta]$は$A_\beta$における同様の区間であるとする。もし、$\overline{f}_\beta < \underline{f}_\alpha$であれば$A_\alpha$に最適解がないことは明らかであるから捨てることができる。



(a) A_αにおける区間関数値　(b) A_βにおける区間関数値

図　ミニマックス法における区間関数値比較

(3)：制約条件が満たされているかどうか判定する。すなわち、ある部分領域A_iに対して$G_s(A_i)$の下限＞0であればA_iは捨てることができる。

(4)：ある部分領域A_iにおいて$D \not\ni 0$であれば、この領域に区間ニュートン法を適用する。A_iの中で収束すればその結果を保存し、そうでなければA_iを捨てる。また、$D \ni 0$であれば、A_iを分割する。

(5)：(2)～(4)を繰り返し適用し、残存領域の最大辺があらかじめ定めた値以下になれば終了する。

4．計算例

ミニマックス法による簡単な計算例として拘束条件$0 \leqq x_1 \leqq 3, 0 \leqq x_2 \leqq 5$のもとで、次のRosenbrock関数

$$f_1(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2,$$
$$f_2(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (2 - x_1)^2$$

の最小値を計算した。得られた結果は次の通りである。

$$X_1 = [1.50000\ 00000\ 00000,\ 1.50000\ 00000\ 00000],$$
$$X_2 = [2.25000\ 00000\ 00000,\ 2.25000\ 00000\ 00000],$$
$$F_1 = F_2 = [0.24999\ 99999\ 99999,\ 0.25000\ 00000\ 00000].$$

5．おわりに

区間解析を利用して、目的関数が複数個ある場合の大域的最適解を求める方法を示した。区間解析の特長は、最適解の保証と誤差限界の明示である。但し、変数、目的関数、拘束条件の数が増えると、計算時間が急激に増加するので、その場合に計算時間を短縮するアルゴリズムを開発することが重要な課題である。

参考文献

[1]Floudas, C.A. and Pardalos, P.M. (eds), Recent Advances in Global Optimization, Princeton University Press, New Jersey, 1992.

[2]Hansen, E.R., Global Optimization Using Interval Analysis, Marcel Dekker, New York, 1992.

[3]Moore, R.E., Interval Analysis, Prentice-Hall, New Jersey, 1966.

[4]Hansen, E.R., Interval forms of Newton's method, Computing, vol.20, pp.153-163, 1978.

[5]Osyczka, A., Multicriterion Optimization in Engineering with FORTRAN Programs, Ellis Horwood Limited, Chichester, 1984.

[6]坂和正敏, 非線形システムの最適化＜一目的から多目的へ＞, 森北出版, 1986.