ファジィ目的関数のロバストでソフトな最適化

01009545　広島大学　＊乾口雅弘　INUIGUCHI Masahiro
01202665　広島大学　　坂和正敏　SAKAWA Masatoshi

1．はじめに

ファジィ数理計画法では,「だいたい a 以下」という形のソフトな制約を満たす解や，係数の取りうる範囲を考慮したロバストな解などが求められている．このようなソフト性やロバスト性は，ファジィ目的関数や区間目的関数の最適化にも導入されている．係数のすべての取りうる値に対して最適となる必然的最適解 [1] は，ロバストな性質をもった最も合理的な解といえる．しかし，区間目的関数の必然的最適解は存在しない場合が多いという欠点がある．これに対処するため，係数のどのような取りうる値に対しても，真の最適値からの隔たりが大きくない最大リグレット最小解 [2] や最悪達成率最適解 [3] が提案されている．これらは，ソフトな最適性規準に基づいたロバストな解である．ファジィ目的関数の必然的最適解についても，存在しても必然的最適性の度合いが低く，十分に係数値の可能性が考慮されていない場合が多いという欠点がある．

本研究では，最大リグレット最小解の概念を拡張し，ファジィ目的関数に対するソフトな最適性規準に基づいたロバストな解について考察する．この解は，必然的最適解を緩和したものであり，必然的ファジィ最適解と呼ばれる．まず，ファジィ目的関数をもつ線形計画問題を取り上げ，必然的ファジィ最適解を定義する．次に，ファジィ目的関数が区間目的関数に退化したとき，最良必然的ファジィ最適解が最大リグレット最小解と等価になることを示す．最後に，最良必然的ファジィ最適解の計算方法を提案する．

2．ファジィ目的関数をもつ線形計画問題

次のファジィ目的関数をもつ線形計画問題を考える．

$$\begin{array}{ll}\text{maximize} & \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} \\ \text{sub. to} & \boldsymbol{x} \in X = \{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}\end{array} \tag{1}$$

ただし，A は $m \times n$ 行列であり，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}}$, $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^{\mathrm{t}}$ である．c_j は次のメンバシップ関数をもつ L-R ファジィ数 $\Gamma_j = (c_j^{\mathrm{L}}, c_j^{\mathrm{R}}, \alpha_j, \beta_j)_{L_j R_j}$ に制限された可能性変数である．

$$\mu_{\Gamma_j}(r) = \begin{cases} L_j\left(\dfrac{c_j^{\mathrm{L}} - r}{\alpha_j}\right); & r < c_j^{\mathrm{L}} \\ 1; & c_j^{\mathrm{L}} \leq r \leq c_j^{\mathrm{R}} \\ R_j\left(\dfrac{r - c_j^{\mathrm{R}}}{\beta_j}\right); & r > c_j^{\mathrm{R}} \end{cases} \tag{2}$$

ただし，型関数 L_j, $R_j : [0, +\infty) \mapsto [0,1]$ は $L_j(0) = R_j(0) = 1$ なる上半連続な非増加関数である．なお，実行可能集合 X は有界と仮定する．

以後，次のファジィ集合 $\boldsymbol{\Gamma}$ を用いる．

$$\mu_{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{c}) = \min_{j=1,2,\ldots,n} \mu_{\Gamma_j}(c_j) \tag{3}$$

3．必然的ファジィ最適解

$\boldsymbol{c}$ を目的関数の係数ベクトルとする通常の線形計画問題 (1) 式を考える．最適値との差が大きくない目的関数値をもつ実行可能解は準最適解と考えることができる．このようなソフトな最適性の観点から，最適値との差に応じてメンバシップ値を与えることにより，次のファジィ最適解集合 $Opt(\boldsymbol{c})$ が定義できる．

$$\mu_{Opt(\boldsymbol{c})}(\boldsymbol{x}) = \inf_{\boldsymbol{y} \in X} \min(\mu_{Dif}(\boldsymbol{c}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}), \chi_X(\boldsymbol{x})) \tag{4}$$

ただし，$\mu_{Dif} : \mathbf{R} \mapsto [0,1]$ は非増加関数とする．また，χ_X は X の特性関数である．

ファジィ最適解集合をファジィ目的関数をもつ線形計画問題の場合へ拡張することを考えれば，可能性測度に基づくものと必然性測度に基づくものとの２種類のものが定義できる．本研究では，ロバストでソフトな最適解を論じるので，必然性測度に基づくものを取り上げる．必然的ファジィ最適解集合 $\Box Opt$ は次のように定義される．

$$\mu_{\Box Opt}(\boldsymbol{x}) = \inf_{\boldsymbol{c}} \max\{(1 - \mu_{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{c})), \mu_{Opt(\boldsymbol{c})}(\boldsymbol{x})\} \tag{5}$$

いま，擬逆関数 μ^*_{Dif} を

$$\mu^*_{Dif}(h) = \sup\{r \mid \mu_{Dif}(r) \geq h\} \tag{6}$$

とし，$h^0 = \mu_{\Box Opt}(\boldsymbol{x})$ と定義すると，

$$\begin{array}{l}\mu_{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{c}) > 1 - h^0 \text{ ならば,} \\ \quad \text{任意の} \boldsymbol{y} \in X \text{ について,} \quad \boldsymbol{c}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} \leq \mu^*_{Dif}(h^0)\end{array} \tag{7}$$

が成立する．これより，メンバシップ値が $1 - h^0$ より大きい $\boldsymbol{c}$ が実現すれば，必ず最適値との差が $\mu^*_{Dif}(h^0)$ 以下になることがわかる．

必然的ファジィ最適性に基づくと，最も合理的な解は，

$$\underset{\boldsymbol{x} \in X}{\text{maximize}} \ \mu_{\Box Opt}(\boldsymbol{x}) \tag{8}$$

と与えられる．以後，(8) 式の最適解を最良必然的ファジィ最適解と呼ぶ．

[定理1] L-R ファジィ数 Γ_j が区間に退化したとき，最良必然的ファジィ最適解は最大リグレット最小解と一致する．

4．最良必然的ファジィ最適解の計算方法

最良必然的ファジィ最適解の計算方法について考察する．(8) 式の最適化問題は，補助変数 $h \in [0,1]$ を導入することにより，次のように変形できる．

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & h \\ \text{sub. to} & \sup\limits_{\substack{\boldsymbol{c} \\ \mu_{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{c})>1-h}} \sup\limits_{\boldsymbol{y}\in X} (\boldsymbol{cy}-\boldsymbol{cx}) \leq \mu^*_{Dif}(h) \\ & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \end{array} \tag{9}$$

ここで，$\boldsymbol{\Gamma}$ の台（強 0–レベル集合）$(\boldsymbol{\Gamma})_0$ を用いて，集合 ΠS^0 を

$$\Pi S^0 = \left\{ \boldsymbol{x} \in X \;\middle|\; \boldsymbol{cx} = \max_{\boldsymbol{y}\in X} \boldsymbol{cy} \text{ なる } \boldsymbol{c} \in \mathrm{cl}\,(\boldsymbol{\Gamma})_0 \text{ が存在する} \right\} \tag{10}$$

と定め，ΠS^0 のすべての端点集合 ΠB^0 を

$$\Pi B^0 = \{\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, \ldots, \boldsymbol{y}^p\} \tag{11}$$

と表すことにする．(10) 式の cl D は集合 D の閉包を意味する．ΠB^0 は容易に算出することができる [3]．

ΠB^0 の要素 $\boldsymbol{y}^i$ を用いると，(8) 式はさらに次のように変形できる．

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & h \\ \text{sub. to} & \max\limits_{\boldsymbol{c}\in\mathrm{cl}\,(\boldsymbol{\Gamma})_{1-h}} (\boldsymbol{cy}^i - \boldsymbol{cx}) \leq \mu^*_{Dif}(h), \\ & \qquad i = 1,2,\ldots,p \\ & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \end{array} \tag{12}$$

ただし，$(\boldsymbol{\Gamma})_{1-h}$ はファジィ集合 $\boldsymbol{\Gamma}$ の強 $(1-h)$ –レベル集合である．型関数 L_j の擬逆関数 L^*_j を

$$L^*_j(h) = \inf\{r \mid \mu_L(r) \leq h\} \tag{13}$$

と定義することにより（R_j についても同様に），閉包 cl $(\boldsymbol{\Gamma})_{1-h}$ は，

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}\,(\boldsymbol{\Gamma})_{1-h} = \{\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \mid \\ c^{\mathrm{L}}_j - \alpha_j L^*_j(1-h) \leq c_j \leq c^{\mathrm{R}}_j + \beta_j R^*_j(1-h), \\ j = 1,2,\ldots,n\} \end{aligned} \tag{14}$$

と表せる．$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}^i$ が与えられたとき，(12) 式の部分問題 $\max_{\boldsymbol{c}\in\mathrm{cl}\,(\boldsymbol{\Gamma})_{1-h}}(\boldsymbol{cy}^i - \boldsymbol{cx})$ の最適解 $\boldsymbol{c}^*(\cdot) = (c^*_1(\cdot), c^*_2(\cdot), \ldots, c^*_n(\cdot))$ は次のように求められる．

$$c^*_j(h) = \begin{cases} c^{\mathrm{L}}_j - \alpha_j L^*_j(1-h); & y^i_j - x_j < 0 \\ c^{\mathrm{R}}_j + \beta_j R^*_j(1-h); & y^i_j - x_j \geq 0 \end{cases} \tag{15}$$

以上より，次のアルゴリズムにより，近似的に最良必然的ファジィ最適解が計算できる．

Step 1. $c^1_j = c^{\mathrm{R}}_j$ として，ΠB^0 の中で $\boldsymbol{c}^1\boldsymbol{y}^i$ が最大となる $\boldsymbol{y}^i$ を $\boldsymbol{z}^1$ とする．

Step 2. $h^{\mathrm{L}} = 0$，$h^{\mathrm{U}} = 1$，$k = 2$，$\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{z}^1$ とおく．

Step 3. すべての $\boldsymbol{y}^i \in \Pi B^0$ について，

$$\mu_{Dif}\left(\max_{\boldsymbol{c}\in\mathrm{cl}\,(\boldsymbol{\Gamma})_{1-h}} (\boldsymbol{cy}^i - \boldsymbol{cx}^0)\right)$$

の最小値 h^k を与える $\boldsymbol{y}^i$ を $\boldsymbol{z}^k$ とし，その最適解を $\boldsymbol{c}^k(\cdot)$ とする．

Step 4. $h^k > h^{\mathrm{L}}$ ならば，$h^{\mathrm{L}} = h^k$ とする．

Step 5. $h^{\mathrm{U}} - h^{\mathrm{L}} < \varepsilon$ ならば，終了する．このとき，最適解は $\boldsymbol{x}^0$ である．

Step 6. $h^{\mathrm{S}} = h^{\mathrm{L}}$ とおく．

Step 7. $h = \frac{1}{3}(h^{\mathrm{S}} + 2h^{\mathrm{U}})$ として，次の線形計画問題を解き，最適解を $(\boldsymbol{x}^*, r^*)$ とする．

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & r \\ \text{sub. to} & \boldsymbol{c}^i(h)\boldsymbol{z}^i - \boldsymbol{c}^i(h)\boldsymbol{x} \leq r, \\ & \qquad i = 1,2,\ldots,k \\ & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \end{array} \tag{16}$$

Step 8. $\mu_{Dif}(r^*) < h$ ならば，$h^{\mathrm{U}} = h$ とする．そうでなければ，$h^{\mathrm{S}} = h$ とおき，Step 7 へ戻る．

Step 9. $\mu_{Dif}(\boldsymbol{c}^i(h^{\mathrm{L}})\boldsymbol{z}^i - \boldsymbol{c}^i(h^{\mathrm{L}})\boldsymbol{x}^*) \geq h^{\mathrm{L}}$, $i = 1,2,\ldots,k$ が成立するならば，$\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}^*$, $k = k+1$ として，Step 3 へ戻る．

Step 10. $h = \frac{1}{3}(2h^{\mathrm{L}} + h^{\mathrm{U}})$ として，(16) 式の線形計画問題を解き，最適解を $(\boldsymbol{x}^*, r^*)$ とする．

Step 11. $\mu_{Dif}(r^*) < h$ ならば，$h^{\mathrm{U}} = h$ とし，Step 10 へ戻る．そうでなければ，$\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}^*$, $k = k+1$ として，Step 3 へ戻る．

5．おわりに

本研究では，差に基づき必然的ファジィ最適解を定義したが，比に基づいても同様な議論ができる．

参考文献

1. 乾口：ファジィ数理計画法，ファジィＯＲ（浅居，田中(編)），日刊工業新聞社，41-90 (1993).
2. 乾口，久米：最大リグレット最小化に基づく区間目的関数をもつ線形計画問題の解の概念，日本経営工学会誌，Vol.42, No.3, 193-199 (1991).
3. 乾口，村田，坂和：区間目的関数をもつ線形計画問題における最悪達成率最適化，システム制御情報学会論文誌，Vol.6, No.1, 243-251 (1993).