

# 確率的DEAモデルにおけるウェイト付けの方法

01604524 神戸大学 \* 森田 浩 MORITA Hiroshi  
神戸大学 麻野 浩樹 ASANO Hiroki  
01501824 神戸大学 藤井 進 FUJII Susumu

## 1 確率的DEAモデル

多入力多出力システム (DMU; Decision Making Unit) の相対的な効率性を評価する DEA (Data Envelopment Analysis) は、入出力データに基づいたノンパラメトリック手法の一つとして広く使われるようになってきた。一般的な DEA モデルでは、この入出力データとして、通常得られた (正の実数) 値が用いられている。しかし、実際に得られるデータでは、対象とする DMU の数が多くなると入出力項目の値をすべての DMU に対して同じ条件で観測することが難しくなったり、値が不安定で変わりやすく観測しづらい入出力項目を代表値や予測値などで表現したり、さらには数量化されていない客観的データとして与えられたりするような状況も考えられる。このような不確実性のあるデータに対する DEA モデルの一つとして、確率的変動が含まれているデータによる確率的 DEA モデルの研究が行なわれている [4, 5]。確率的変動による効率性評価への影響として効率的か非効率的かの評価を誤ることが挙げられる。つまり、確率的変動によって、効率的な DMU を非効率的であると評価してしまう第1種の誤りと、非効率的な DMU を効率的であると評価してしまう第2種の誤りが存在する [5]。

DEA でしばしば問題となるのが最適ウェイトの一意性である。効率的と評価される DMU に対して、それを効率的と評価する最適ウェイトは一意には定まらず、クロス効率性などの相互評価情報を用いる場合には最適ウェイトを一意に定める方法がいくつか提案されている [2, 6]。最適ウェイトも当然のことながら確率的変動の影響を受ける。あるウェイト付けによって効率的と評価されても、入出力データが確率的に変動すればこのウェイトによって常に効率的と評価できるとは限らない。一意性のない最適ウェイトの中で効率的と評価することのできる確率を考えることで、確率的変動に対して最も安定となるウェイトをユニークに決定することを考察する。

## 2 確率的変動に対する安定性

### 2.1 効率的DMUの安定性

一般の確定的な DEA モデルで DMU の安定性を評価するとき、評価対象の DMU を生産可能集合から取り除いて効率値を求める方法 [1] がある。このときの効率値  $Z^*$  には 1 以下という制約がなくなるため、効率的な DMU に対する効率値は  $Z^* \geq 1$  となる。この値は評価対象の DMU が生産可能集合の有効フロンティアからどの程度離れているかを原点からそれぞれへの幾何学的距離の比によって表したものであり、その値の大小によって効率的な DMU を順序付けている。

確率的データの構造は、ある値に確率的変動が加法的に加えられたものとしている。したがって、安定性を測るための距離としては、確率的な距離としてマハラノビス距離を用いるが、原点からの距離の比ではなく、入出力データの実現値から生産可能集合までの距離を考える [3]。この距離の値は入出力データの信頼領域の大きさすなわち確率レベルに対応しており、その値の大小によって効率的な DMU の順序付けをした。得られる確率レベルは、DMU が効率的と評価される確率の下限値を示しているが、評価対象としている DMU の確率的変動しか取り上げておらず、生産可能集合を構成する DMU は便宜的に得られた実現値に固定していた。そのため、評価対象の DMU に対する最適なウェイトは一意性に決まるものの、これは固定されている生産可能集合のみによって決まるため、他の DMU の確率的変動に対する影響が表現できていない。

すべての DMU の確率的変動を同時に扱おうと、評価対象の DMU だけでなく生産可能集合も変化する。図 1 にある確率レベルにおける評価対象 D の入出力データの信頼領域とそのときの生産可能集合の有効フロンティアの最小フロンティアを例示している。ある一定の確率レベル  $\alpha$  において、評価対象としている DMU にとって最も不利となるような入出

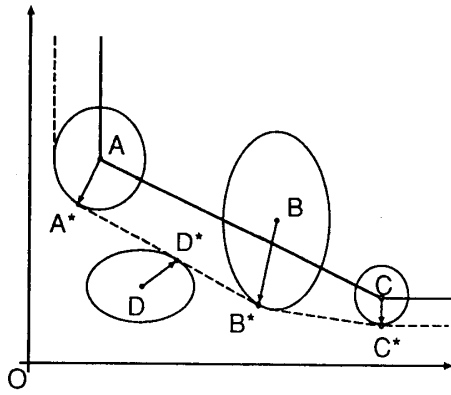


図 1: 信頼領域と最小フロンティア

力データをすべての DMU がとったときの効率値を、 $\alpha$ における最小効率値  $Z^*(\alpha)$  とする。効率的と評価される D にある確率レベルでの変動を与えたとき、D のデータの信頼領域と生産可能集合 (点線) が接する確率レベルが存在する。これが最小効率値が 1 である最大の確率レベル  $p = \sup\{\alpha | Z^*(\alpha) = 1\}$  である。

## 2.2 最適ウェイトの安定性

$p$  を与える入出力データによって DEA モデルを解いたときに得られる最適ウェイトは一意に決まる。さらに、このウェイトで DMU を評価したとき、確率  $p$  で生じるどのような確率的変動に対しても効率的と評価されることになり、一般の DEA モデルで得られた最適ウェイトの中で最も確率的に安定なウェイトを選択できることになる。

図 2 は図 1 の 4 つの DMU が効率的と評価されるためのウェイト比を表したものであり、網かけの部分が D の最適ウェイトである。図 3 はある確率レベルでの最適ウェイトを濃い網かけで示しており、その範囲が小さくなっていく様子を表している。確率レベル  $p$  では最適ウェイトは一意に定まり、太いベクトルで表されている。

## 3 まとめ

確率的変動に対する安定性の観点から最適ウェイトを決定した。このウェイトを用いたクロス効率値などによる順序付けとの比較も検討したい。

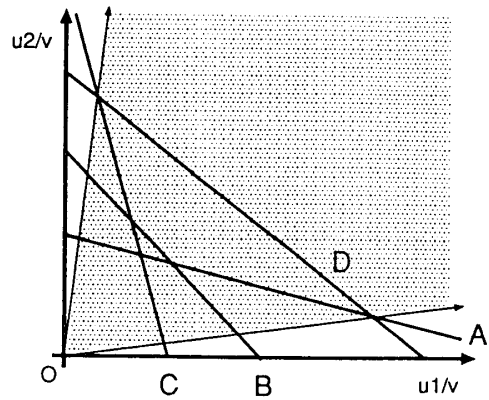


図 2: 元のデータに対する最適ウェイト

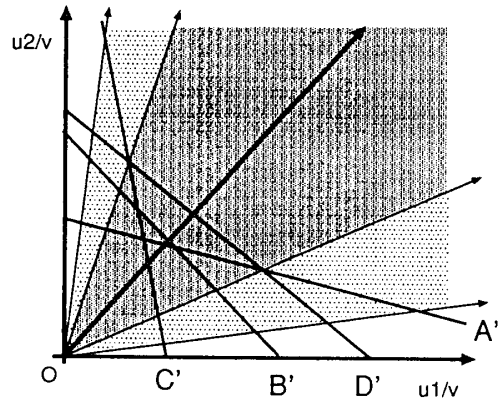


図 3: 確率レベルと最適ウェイト

## 参考文献

- [1] P. Andersen and N. C. Petersen, "A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis", *Management Science*, Vol. 39, pp. 1261-1264 (1993).
- [2] 批々木規雄, DEA における修正クロス効率性による評価法, 評価の OR 研究部会資料 (1994).
- [3] 森田浩 他, 確率的変動と DEA 効率性, 日本 OR 学会春季研究発表会アブストラクト集, pp. 275-276 (1994).
- [4] 森田浩, DEA の確率的側面について, 第 6 回 RAMP シンポジウム論文集, pp. 91-100 (1994).
- [5] D. L. Retzlaff-Roberts and R. C. Morcy, "A goal programming method of stochastic allocative data envelopment analysis", *European Journal of Operational Research*, vol. 71, pp. 379-397 (1993).
- [6] 杉山学 他, 事業体間の相互評価情報を用いた調和的な効率性評価法, 日本 OR 学会春季研究発表会アブストラクト集, pp. 131-132 (1994).
- [7] 刀根薫, 経営効率性の測定と改善, 日科技連出版, (1993).