1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

Clusteringによるグラフ分割問題へのメタ解法

02202100 早稲田大学 *下村 雅彦 SHIMOMURA Masahiko
02501480 早稲田大学 藤沢 克樹 FUJISAWA Katsuki
01603200 早稲田大学 森戸 晋 MORITO Susumu
01108010 東京商船大学 久保 幹雄 KUBO Mikio

1 はじめに

グラフ分割問題(Graph Partitioning Problem)は、$\mathcal{NP}$-hard に分類される難しい組合せ最適化問題の1つである。これらの問題は、規模が大きくなると、全列挙による解法が事実上不可能になるので、効率的な近似解法の構築が古くから研究されている。本研究では、問題の構造を生かしてメタヒューリスティック (メタ解法) を構築し、その有効性について実験、検証する。

2 グラフ分割問題

単純無向グラフ $G=(V,E)$ (点数 $n=|V|$ は偶数) が与えられたとき、点集合Vの一様分割(uniform partition) (L,R) とは $L\cap R=\phi, L\cup R=V, |L|=|R|=n/2$ を満たす点の部分集合の対である。グラフ分割問題とは、L,R 間にまたがる枝の本数を費用関数値とし、それを最小にする一様分割 (L,R) を求める問題である。応用分野にはプログラムのセグメント化や、VLSI の回路設計などがある。

3 提案アルゴリズム

Vを Cluster に分割するとは、Vを $V=\cup_{j=1}^{m}C_j$ かつ $C_i\cap C_j=\emptyset (i\neq j)$ を満たす $C_j (j=1,\dots,m)$ に分けることである。
提案アルゴリズムは、以下の3段階より構成される。

Phase 1 Cluster generation phase

Phase 2 Cluster consolidation phase

Phase 3 Improvement phase

全体の流れは、まず Phase 1 でVを Cluster に分割し、Phase 2で個々の Cluster を組み合せ、一様分割を構築する。最後に Phase 3 において、Phase 2 での解を初期解として局所最適解を求めるアルゴリズムである。

3.1 Cluster generation phase

ここでは、グラフの Clique (完全部分グラフ) を基にした Cluster を採用する。

定義 1 G内の位数δ (δはパラメータ) 以上の Clique を $Q_i=(V_i,E_i)(i=1,\dots,k)$ とする。$E'=\cup_{i=1}^{k}E_i$とすると、G の部分グラフ $H=(V,E')$ 上での個々の連結成分 $C_j(j=1,\dots,m)$ を Cluster とする (図1参照)。

定義1より以下の補題が成り立つ。

補題 1 位数δ以上の Clique より導かれる Cluster を横切る分割は、少なくとも$\delta-1$本の枝を含む。

あるグラフでの実行可能解の値を Zとする。このとき$\delta=Z+2$ 以上の Clique より導かれる Cluster を横切る最適分割は、補題1より費用関数値が最低でも $Z+1$ となることより存在しない。よって以下の命題が成り立つ。

命題 1 位数が $Z+2$ 以上の Clique は Cluster としてまとめてよい。

<u>ステップ 1</u> 位数δ以上の Clique の探索によって V を Cluster に分割する。この問題は、これ自身 $\mathcal{NP}$-hard であるので、探索には LSM[3] を用いる。

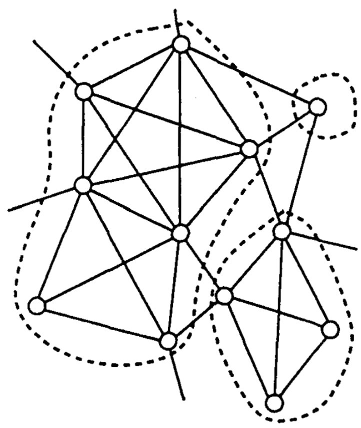

図 1: $\delta=4$ のときの Cluster への分割。点線で囲まれた部分が Cluster を表す。

3.2 Cluster consolidation phase

Cluster generation phase において、グラフは位数が1またはδ以上の Cluster に分割される。位数がδ以上の Cluster の集合をΓと初期設定し、その要素を **Basic Cluster**(BC) と呼ぶ。

<u>ステップ 2</u> Γが空になるまで、Γから1つの Basic Cluster (BC) を選択し、$\Gamma:=\Gamma\setminus BC$とする。

クラスター選択の基準にはランダム性が含まれているので、複数の試行により、さらに良好な解を得られる可能性がある。ここでは、以下の操作をアルゴリズムに加える。

ステップ 3 1つの BC に対してステップ4からステップ7までを $1 iteration$ とし、θ回繰り返す。ここでθはパラメータである。

点 $i(\in V)$ の属する Cluster を $C(i)$ と記す。

定義 2 点 $i(\in V)$ に対して (図 2参照)

- EX_i : $i \in BC$のときは、$(i,j) \in E, j \in V \setminus BC$ となる枝の本数であり、$i \in V \setminus BC$ のときは、$(i,j) \in E, j \in BC$となる枝の本数
- SA_i : i と $C(i)$ 内の点との間の枝数
- IN_i :EX, SA 以外の点との間の枝数

定義 3 Cluster C_jに対して (図 2参照)

- $\boldsymbol{EX}_j = \sum_i EX_i (i \in C_j)$
- $\boldsymbol{IN}_j = \sum_i IN_i (i \in C_j)$

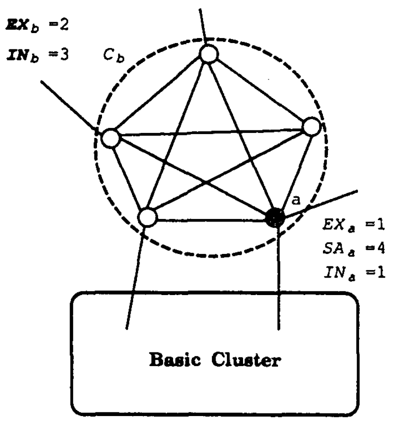

図 2: EX, SA, INの説明図

ステップ 4 $|BC| \geq n/2$ ならステップ6へ、そうでなければ BCに加える Cluster を、以下の2つの方法のいずれかをρをパラメータとして確率的に選択することにより決定する。

node selection: (1 点単位で評価, 確率ρで選択される。) $EX_i > 0$ で $EX_i - IN_i - SA_i$ が最大となる点 $i^*(\in V \setminus BC)$ を選択し、$BC := BC \cup C(i^*)$ とする。

cluster selection: (Cluster 単位で評価, 確率 $1-\rho$で選択される。)$\boldsymbol{EX}_j > 0$ で $\boldsymbol{EX}_j - \boldsymbol{IN}_j$が最大となる Cluster$C_j^*(\subset V \setminus BC)$ を選択し、$BC := BC \cup C_j^*$とする。

ただし、隣接するクラスターが存在しない場合は、$EX_i > 0, \boldsymbol{EX}_j > 0$ の条件を外して計算する。なお、同じ評価値を持つ成分が複数個ある場合、その中からランダムに選択する。

ステップ 5 $EX_i, IN_i (i \in V)$ を再計算する。$|BC| < n/2$ ならステップ4へ、$|BC| \geq n/2$ ならステップ6へ。

ステップ 6 $|BC| = n/2$ なら Phase 2 を終了し、$|BC| > n/2$ なら、$EX_i - IN_i - SA_i$が最大となる点 $i^*(\in BC)$ を選択し、$BC := BC \setminus i^*$とする。同様の操作を $|BC| = n/2$ となるまで行う。

3.3 Improvement phase

定義 4 分割(L,R)において、L と Rの点を1つずつ交換して得られる分割をSwap 近傍という。First Swap とは、費用関数値の減少を実現する、最初に見つかった点の対を選択する。

ステップ 7 Cluster consolidation phase までの解を初期解として、First Swap 近傍での Local Search をおこなう。

提案アルゴリズムは、Phase 2で構築した初期解を Phase 3 で改良するという操作を繰り返す Multiple Start の Local Search である。

4 計算機実験

グラフ分割問題に関する過去の研究には、Lin と Kernighan[2] による Local Search、Feo ら [5] による GRASP、Johnson ら [4] による Simulated Annealing、藤沢ら [1] による LSM などがあるが、現在のところ Tabu Search の変形である LSM が計算時間、費用関数値において最も優れている。よって本研究では、比較対象としてLSM を選択し、実験データには Johnson らによる Benchmark 問題を用いる。

アルゴリズムのパラメータは、クリーク位数の下限δ、繰り返し回数θ、selection ルールの選択確率ρがあるが、これらは予備的な実験によって適正値を求めるものとする。実験結果の詳細は発表時に示す。

参考文献

[1] 藤沢 克樹, 久保 幹雄, 森戸 晋 . Tabu Search のグラフ分割問題への適用と実験的解析 . 電気学会論文誌, 114-C:430-437, 1994.

[2] B.W.Kernighan and S.Lin. An efficient heuristic procedure for partitioning graphs. *Bell System Technical Journal*, 49:291-307, 1970.

[3] M.Kubo, K. Fujisawa, and S. Morito. *The Life Span Method -A New Variant of Local Search-* . The Institute of Statistical Mathematics Cooperative Research Report 53, pp.85-104, February, 1994.

[4] D.S.Johnson, C.R.Aragon, L.A.McGeoch,and C.Schevon. Optimization by simulated annealing: An experimental evaluation, part I, graph partitioning. *Operations Research*,39:378-406, 1991.

[5] M.Laguna, T.A.Feo, and G.C.Elrad. A greedy randomized adaptive search procedure for the two-partition problem. *Operations Research*, 42:677-687, 1994.