ミニマックス全域森問題のいくつかの拡張*

01700900　防衛大学校情報工学科　† 山田武夫　YAMADA Takeo
02301780　防衛大学校情報工学科　高橋秀雄　TAKAHASHI Hideo
01107880　防衛大学校情報工学科　片岡靖詞　KATAOKA Seiji

1　はじめに

ミニマックス全域森問題 [3][4] は以下のように定義された。$G=(V,E)$ を節点集合 V、枝集合 Eから成る連結な無向グラフとし、G には枝コスト $w:E\to R_+$と r 個の 根節点の集合 $U=\{u_1,u_2,\ldots,u_r\}\subseteq V$が与えられているものとする。$G$ における共通の節点を持たない木の組 $F=(T_1,T_2,\ldots,T_r)$ がUを根とした全域森であるとは、(i) u_i はT_iに含まれる ($i=1,2,\ldots,r$)、(ii) G のすべての節点は$\cup_{i=1}^{r}T_i$に含まれる、の 2 条件を満たすことをいう。木Tのコスト $w(T)$ を、Tに含まれる枝のコストの総和とし、全域森 Fの評価値を

$$w(F):=\max\{w(T_1),w(T_2),\ldots,w(T_r)\}$$

と定義する。ミニマックス全域森問題 (以下 MMSFP) とは、$w(F)$ を最小にする全域森 F^*を求める問題である。

MMSFP に対しては、$r=2$ の場合について近似解法 [3] や厳密解法 [4] が提案されているが、本稿では$r\geq 3$ の場合への拡張や根節点配置問題等、関連する問題を検討する。

2　近似解法

$r=2$ の場合の近似解法は、局所探索法に基づくもので、枝交換と再計算という 2 種類の操作を反復することによって解の評価値を逐次改善していた [3]。これに対し、$r\geq 3$ の場合も基本的には同様の考え方を採るが、枝交換をどの 2 つの木の間で行うかが問題となる。この問題に対し、本稿では近視眼的戦略と遠視眼的戦略の 2 つのアプローチを検討する。前者は枝交換の度に全域森の評価値を最大限改善することを狙ったもので、枝交換はコスト最大の木とそれに隣接する木の間で行われる。これに対して遠視眼的戦略は、必ずしもコスト最大の木に限らず、任意の 2 つの木の間で可能なかぎり枝交換を行う方法である。したがって、遠視眼的戦略では最終的に得られる全域森を出来るだけバランスの取れたものとすることを目標としていて、枝交換の度に評価値が改善されるわけではない。

2.1 誤差評価

G ですべての根節点 $u_1,u_2,\ldots,u_r$を同一視したグラフを G_0とし、G_0における最小全域木を T^0とする。G の任意の全域森 $F=(T_1,T_2,\ldots,T_r)$ は、G_0では全域木となるので

$$\begin{aligned} w(F) &= \max\{w(T_1),\ldots,w(T_r)\} \\ &\geq \lfloor\{w(T_1)+\ldots+w(T_r)\}/r\rfloor \\ &\geq \lfloor w(T^0)/r\rfloor \end{aligned}$$

が成立し、$\underline{w}:=\lfloor\{w(T^0)\}/r\rfloor$ は $w(F^*)$ の下界値を与える。したがって、近似解$\overline{F}$に対して $(w(\overline{F})-\underline{w})/\underline{w}$は相対誤差の上限値を与える。

2.2 数値実験

いくつかの平面グラフに対し、近似解を求め、その結果を表 1 にまとめた。これより、計算時間は近視眼的方法方法がやや早いが、精度の面も含めると遠視眼的方法に軍配をあげてよいようである。

3　厳密解法

MMSFP を分枝限定法で解くためのアルゴリズムを以前に提案した [4] が、その枠組は $r\geq 3$ の場合もほぼそのまま適用可能である。最初に、部分問題 $P=(T_{P1},\ldots,T_{Pr},X_P)$ を以下のように定義する。T_{Pi}はu_iを根とした部分木で、部分問題 Pにおける第 i 固定部分木と呼ぶ。また、X_Pはこれらと共通部分を持たないEの部分集合で、Pにおける禁止枝集合と呼ぶことにする。全域森 $F=(T_1,\ldots,T_r)$ が、P-許容であるとは、$T_{Pi}\subseteq T_i$, $(i=1,\ldots,r)$, $(\cup_{i=1}^{r}T_i)\cap X_P=\emptyset$ であることをいう。部分問題 Pとは、P-許容な全域森のうち、コスト最小のものを求める問題である。

*OR 学会春季大会, (広島修道大学 1995.3.27-28)

表 1: 実験結果. (上段:近視眼的、下段:遠視眼的)

r	problem	steps	error	time
3	$P_{200,560}$	10.4	16.89	0.122
		17.9	4.60	0.153
	$P_{600,1680}$	25.7	10.57	1.347
		34.4	2.54	1.583
	$P_{1000,2800}$	27.4	1.92	3.610
		29.8	1.48	3.590
5	$P_{200,560}$	17.1	28.88	0.137
		36.7	10.64	0.207
	$P_{600,1680}$	43.8	22.33	1.790
		75.1	5.26	2.247
	$P_{1000,2800}$	28.1	23.27	3.511
		62.5	1.59	5.436
10	$P_{200,560}$	18.6	46.82	0.142
		52.5	22.93	0.258
	$P_{600,1680}$	49.5	30.73	2.020
		139.4	8.79	3.590
	$P_{1000,2800}$	47.0	30.81	4.635
		161.1	7.59	10.130

部分問題 P の下界値の一つは、2.1 と同様に

$$LB_1(P) \equiv \lfloor \{w(T_P^0)\}/r \rfloor$$

で与えられる。ここに、T_P^0 は G_0 における P-許容な最小全域木である。

もうひとつの下界値 LB_2 も前報 [4] と同様、補助グラフ G_{Pi} とその上での累積コスト関数 $w_{Pi}^0(k)$ を以下のように導入して求められる。G_{Pi} を G から $X_P \cup (\cup_{j \neq i} T_{Pj})$ および、これに接するすべての枝を除いて得られる部分グラフとする。$\mathcal{F}_{Pi}(k)$ を G_{Pi} の k 本の枝から成る森で T_{Pi} を含むものの集合とすると、累積コスト関数 $w_{Pi}^0(k) := \min\{F \text{の総コスト} \mid F \in \mathcal{F}_{Pi}(k)\}$ は Kruskal の方法で容易に求められる。ここで、$\Delta := \{(k_1, \ldots, k_r) \mid k_1 + \ldots + k_r = |V| - r, k_1 \geq 0, \ldots, k_r \geq 0\}$ として

$$LB_2(P) := \min_{(k_1,\ldots,k_r)\in\Delta} [\max\{w_{P1}^0(k_1), \ldots w_{Pr}^0(k_r)\}]$$

を求めると、これは第二の下界値を与える。LB_2 はボトルネック型の目的関数を有する資源配分問題となっているので、動的計画法によって $O(r(|V|-r))$ の計算量で解くことが出来る。

さらに、LB_2 より弱いが計算が容易な

$$LB_3(P) := \max\{w(T_{P1}), \ldots, w(T_{Pr})\}$$

も有用な下界値である。

4 根節点配置問題

今まで根節点は所与として来たが、本節では根節点の位置決定と MMSFP を融合した問題を考察する。まず、根節点を節点 i に配置した時の設置費用が c_i であるとする。根節点集合を $U = (u_1, u_2, \ldots, u_r) \subseteq V$ ととった場合、U を根とした全域森 $F = (T_1, T_2, \ldots, T_r)$ の評価値は

$$w(U, F) = \max_{1 \leq i \leq r} \{c_{u_i} + w(T_i)\}$$

で与えられるとする。このとき、(U, F) の組で $w(U, F)$ を最小にするものを求めるのがここでの問題である。これを MMSFP/L と表記する。

この問題を解くために、G に仮想的根節点の組 $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$ と枝集合 $E_S := S \times V$ を付加した補助グラフ $\tilde{G}$ を導入し、$\tilde{G}$ において MMSFP を解いた時の解を $\tilde{F} = (\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \ldots, \tilde{T}_r)$ とする。これについて、以下が成立する。

補題 1. 各 $\tilde{T}_i$ は E_S の枝を高々1 本しか含まない。

さらに、次は自明である。

命題 1. 各 $\tilde{T}_i$ が E_S の枝をちょうど 1 本含む時、$\tilde{F}$ は MMSFP/L の最適解を与える。

特に $r = 2$ の場合、命題 1 の条件が成立するための十分条件として次がある。ここで、a を $c_a = \min_{1 \leq i \leq r} c_i$ となる節点とし、G の最小全域木のコストを w_{MST} で、また G から i を開放除去したグラフにおける最小全域木のコストを $w_{MST}^{(i)}$ で表す。

命題 2. $r = 2$ の場合、節点 b で $w_{MST}^{(b)} \leq w_{MST}$ と $c_b - c_a < w_{MST}$ を満たすものが存在すれば各 $\tilde{T}_i$ は E_S の枝をちょうど 1 本含む。

参考文献

[1] J.B. Kruskal., *Proc. AMS*(1956) 7, 48.

[2] R.C. Prim., *Bell Syst. Tech. J.* 36(1957), 1389.

[3] 高橋他、OR 学会春季大会 (1994), 211.

[4] 高橋他、OR 学会秋季大会 (1994), 234.