1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

制御不能流判定問題の NP- 完全性 について

01605000　東京大学　松井知己　MATSUI Tomomi

本発表では、[1,2] において提示された制御不能流判定問題が、NP- 完全のクラスに含まれることを示す。

$G=(V,E,\partial^+,\partial^-)$ を頂点集合 V と有向枝集合 E からなる有向グラフとする。さらに、グラフ G は、入口頂点 $s\in V$ と出口頂点 $t\in V$ が定義されている２端子ネットワークであるとする。２端子ネットワーク G 上の制御不能流とは、 s から t への初等有効道に沿っての単位流、あるいはそれらの正係数の一次結合のことである。

制御不能流判定問題とは、２端子ネットワーク G の入口から出口への流れが与えられたとき、これが制御不能流であるかを判定する問題である。明らかに、入口頂点に入る流れは存在せず、かつ出口頂点から出る流れも存在しない時のみを対象とすれば十分である。

以下では G の各枝上の流れがすべて 1 であり、更に、 G の頂点を通過する流量は全ての頂点において 3 である特殊ケースについてのみ考える。すると、与えられた流れが制御不能流である必要十分条件は、 G 上の流れが（ s から t への） Hamilton 道に沿った単位流、あるいはそれらの正係数の一次結合となることである。

以下では、次の NP- 完全の問題が上記の問題に多項式帰着されることを示す。

集合２分割問題

各行に 1 が丁度３つある $0-1$ 行列 A が与えられたとき、 $1\le Ax\le 2$ を満たす $0-1$ ベクトル x は存在するか？

以下では、集合２分割問題の問題例 (instance) が１つ与えられたとき、その問題例から、 s 以外のすべての頂点の入次数と t 以外のすべての頂点の出次数が 3 である有向グラフ $G=(V,E)$ を構成する

まず、図 1(a) のグラフ H について性質を述べる。グラフ H が、あるグラフ G の部分グラフで、 G は s 以外のすべての頂点の入次数と t 以外のすべての頂点の出次数が 3 であるとしよう。もし G が Hamilton 道 C を持っているならば、 C は、グラフ H を図 1(b1)(b2)(b3) のうちどれかの方法で通過する。また、(b1)(b2)(b3) で用いられている枝集合は、 H の枝集合の分割となっていることに注意されたい。すなわちグラフ H は、３本の枝 $(u,u'),(v,v'),(w,w')$ と x と x' を結ぶ３本の平行枝からなるグラフで、 G 中の任意の Hamilton 道は $(u,u'),(v,v'),(w,w')$ の内最大２本までしか通ることができないという制約がついていると考えることができる。グラフ H を、図 1(c) のように簡略化して表す。

集合２分割問題の問題例

find $x\in\{0,1\}^4$ s.t.$1\le x_1+x_2+x_3\le 2$, $1\le x_1+x_3+x_4\le 2, 1\le x_2+x_3+x_4\le 2$,

に対応して、図２のようなグラフを構築する。このとき、 G において各枝上に 1 の流れを割り当てた流れが制御不能流である必要十分条件が、集合２分割問題の答が YES であることとなる。なぜならば、集合２分割問題が解を持つならば、その解より、 G の枝集合を３つの Hamilton 道に分割することができる。逆に、グラフ G 上の流れが制御不能流ならば、枝 e を通る Hamilton 閉路 C が存在する。この閉路 C から、集合分割問題の解を構築することができる図 3(a) において、上記の問題の解 $x_1=0, x_2=1, x_3=1, x_4=0$ に対応する、Hamilton 道 C を、図 3(b) に対応する枝集合の Hamilton 道への分割を示す。

References

[1] 伊理正夫,　制御不能流の理論と応用, 1994 年度 日本ＯＲ学会春季研究発表会予稿集, pp.63-64.

[2] Masao IRI,　An essay in the theory of uncontrollable flows and congestion,　Technical Report, Department of Information and System Engineering, Faculty of Science and Engineering, Chuo University, TRISE94-03 (1994).

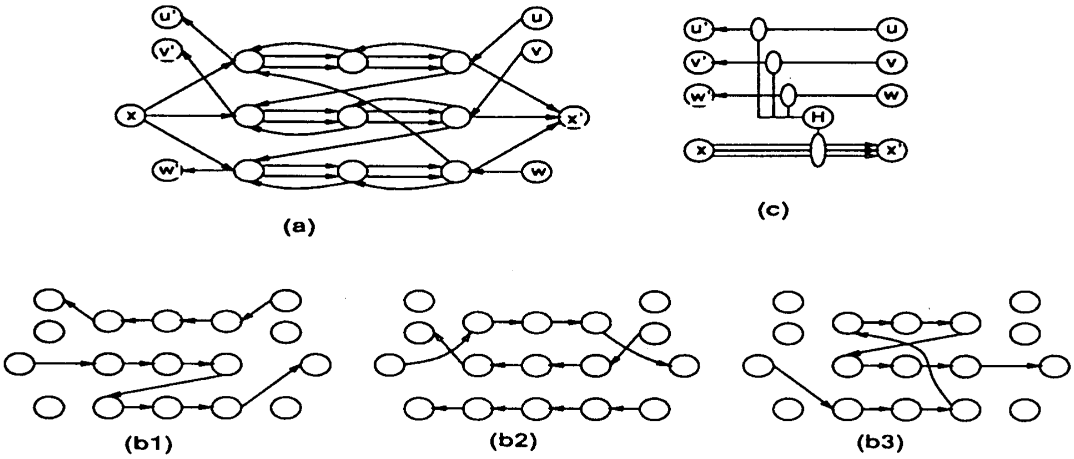

図 1. グラフ H とその性質。

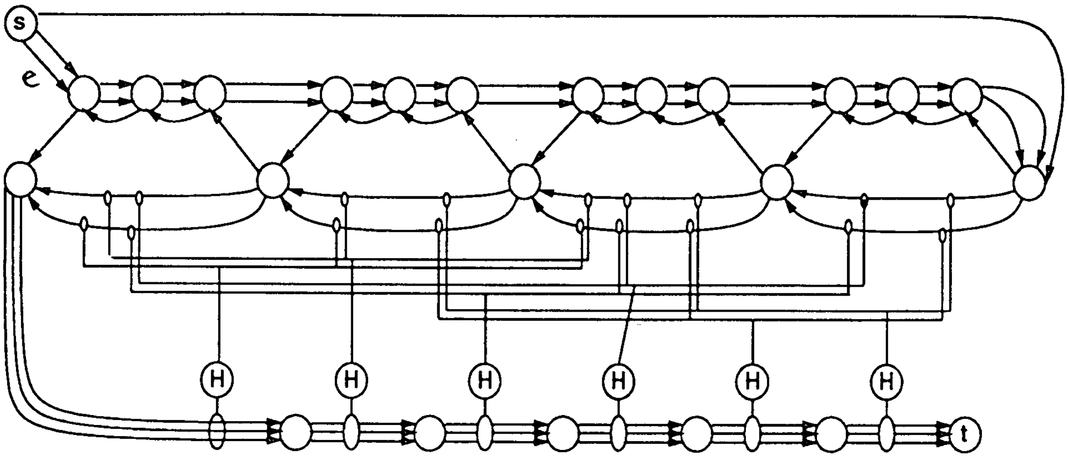

図 2. グラフ G 。

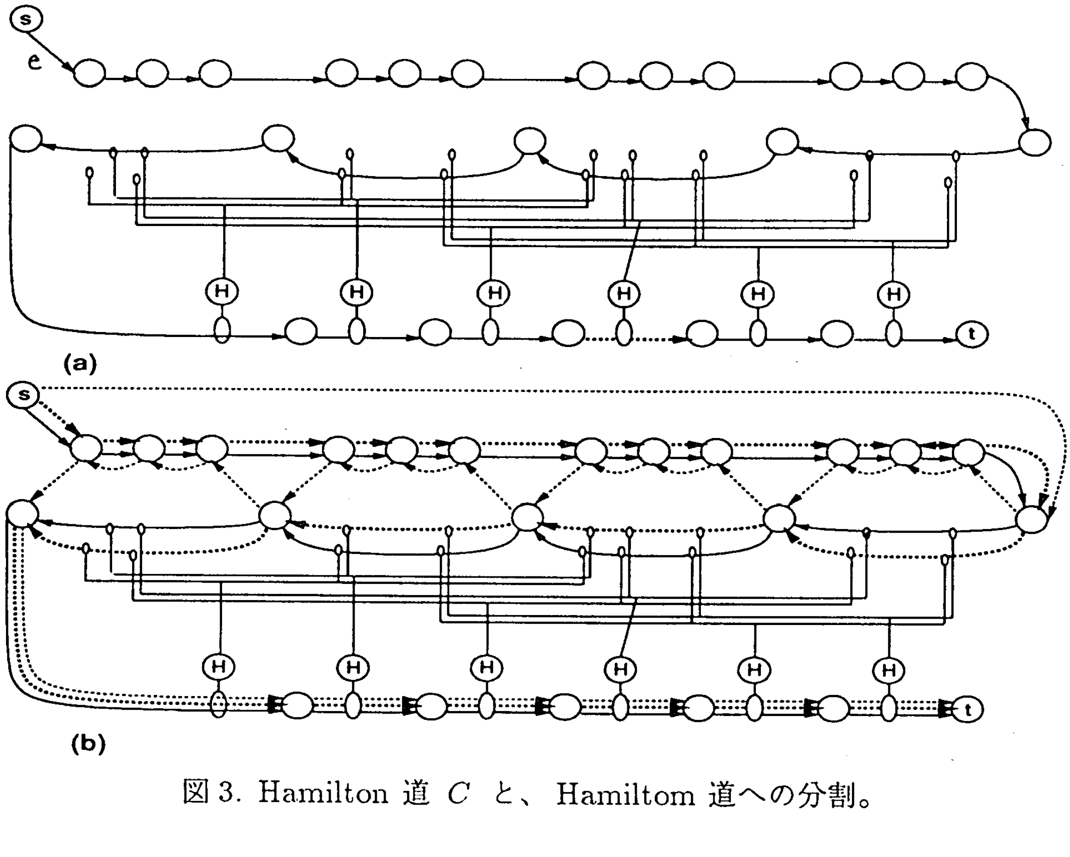

図 3. Hamilton 道 C と、 Hamiltom 道への分割。