1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

価値が時間に関係するナワバリのゲーム

01302694 大阪府立大学 *寺岡義伸 TERAOKA Yoshinobu
01307414 大阪府立大学 辻村和彦 TSUJIMURA Kazuhiko
01704034 三菱重工（株） 山田康吉 YAMADA Yasuyoshi

1.Introduction

ここで取り扱う問題は、以下のようなモデルで端的に表現できる問題であり、動物の対立現象の理論的説明づけから示唆されたモデルである。

２人のプレーヤー（Player Ⅰ,Ⅱ）が１つの縄張りをめぐって対立している。その縄張りは経過時間に関係して変化する価値 $V(t)$ を持っている。対立はにらみ合いではじまり、そのにらみ合いをより長く続けた方が勝ちとなる。勝者は $V(t)$ の価値をもつ縄張りを手に入れることができるが、時刻 t まで継続するためには、両プレーヤー共 t の費用を使わなければならない。各々はどの時刻までに、にらみ合いを断念すべきかを、互いに相手の行動を考えに入れながら決めなければならない。

このような問題にあっては、両プレーヤーにとって利用できる情報様式には、２つの型がある。両者共相手の行動が常に観測でき、どの時刻においても相手がまだ頑張っているのか、もう既に断念してしまったのかが情報として知らされる場合を、Noisy 型と呼ぶ。反対に、両者は互いに相手から自分の行動を観測されない状態にしており、そのため何の情報もない中でどの時点まで頑張るかをあらかじめ決定し、自分の計画した時間が実現されてみてはじめて、相手がまだ頑張っているのか、もう断念してしまった後なのかが知らされる場合を、Silent 型と呼ぶ。この組み合わせとして、Player Ⅰは Silent Player で逆にⅡは Noisy Player の時、Silent-Noisy 型と呼んでいる。

ここでは、議論を簡単にするため、$V(t)$ は $[0,\infty)$ 上で非負な減少関数で $V(0)>0$ とする。

2. Noisy Game

ここでは、両プレーヤーとも相手の行動が常に観測できるから、$M_i(x,y)$ を Player i にとっての期待利得とすると（$i=1,2$）

$$(1)\quad M_1(x,y)=\begin{cases} -x\ , & x<y \\ \frac{1}{2}V(x)-x\ , & x=y \\ V(y)-y\ , & x>y \end{cases}\quad ;\quad M_2(x,y)=\begin{cases} -y\ , & y<x \\ \frac{1}{2}V(y)-y\ , & y=x \\ V(x)-x\ , & y>x\ , \end{cases}$$

が得られる。

このゲームでは、純戦略の中に平衡戦略は存在しない。そこで混合戦略の中から平衡戦略をさがすこととし、Player Ⅰ,Ⅱの混合戦略を次のように想定する：

（1）の $M_1(x,y)$ と $M_2(x,y)$ の類似性により $F(\cdot)$ と $G(\cdot)$ は同じ cdf であり、点 0 での可能な mass part $\alpha\geqq 0$ と区間 $[0,\infty)$ 上での density part $f(\cdot)>0$ とで構成されている。

Theorem 1. $r=\sup\ \{t\mid V(t)>0\}$ とし、$F^*(\cdot)$ および $G^*(\cdot)$ を

$$F^*(z)=G^*(z)=\begin{cases} 1-\exp\left\{-\int_0^z \frac{dt}{V(t)}\right\}\ , & 0\leqq z<r \\ 1\ , & z\geqq r \end{cases}$$

で与えられるとすると、$(F^*(x), G^*(y))$ はゲーム（1）の一つの平衡点であり、この時

$$M_1(F^*, G^*)=M_2(F^*, G^*)=0\quad .$$

3. Silent Game

ここでは、両プレーヤー共相手の行動が全く観測できないから、両者の期待利得は

$$(2)\quad M_1(x,y)=\begin{cases}-x, & x<y\\ \frac{1}{2}V(x)-x, & x=y\\ V(x)-x, & x>y\end{cases}\quad;\quad M_2(x,y)=\begin{cases}-y, & y<x\\ \frac{1}{2}V(y)-y, & y=x\\ V(y)-y, & y>x,\end{cases}$$

で与えられる。前節と同様に混合戦略の中から平衡戦略をみつけることとし、Player I 、IIの混合戦略 $F(x)$ と $G(y)$ を次のように想定する：

$F(\cdot)$ と $G(\cdot)$ は同一の cdf であり、ある区間［0，u）での density part $f(\cdot)>0$ と 点 0 での mass part $\alpha\geqq 0$ および点 u での mass part $\beta\geqq 0$とで構成される。

Theorem 2．u° を区間［$0,\infty$）における方程式 $t=V(t)$ の唯一つの根とし、次のような cdf を考える：

$$F^0(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{V(z)}, & 0\leqq z\leqq u^\circ\\ 1, & z>u^\circ.\end{cases}$$

そうすると、(F^0,F^0) は非 0 和ゲーム（2）の一つの平衡点であり

$$M_1(F^0,F^0)=M_2(F^0,F^0)=0\ .$$

4. Silent-Noisy Game

ここでは、Player I は相手の停止時刻を観測できるが、他方IIは観測できない場合、すなわち I は silent player でIIは noisy player であるゲームを扱う。先の節と同様に、player i への期待利得を $M_i(x,y)$ とすると（i = 1、2）

$$(3)\quad M_1(x,y)=\begin{cases}-x, & x<y\\ \frac{1}{2}V(x)-x, & x=y\\ V(y)-y, & x>y\end{cases}\quad;\quad M_2(x,y)=\begin{cases}-y, & y<x\\ \frac{1}{2}V(y)-y, & y=x\\ V(y)-y, & y>x\end{cases}$$

を得る。このゲームでも純戦略の中に平衡点は存在しない。そこで、前 2 節での考察を参照しながら $F(x)$ と $G(y)$ を次のように想定する。

I の混合戦略 $F(x)$ は区間［0, u）上の density part （ただし$u<r$）$f(x)>0$、および $x=0$ での mass part $\alpha\geqq 0$ と $x=u$ での mass part $\beta\geqq 0$ とで構成される。

II の混合戦略 $G(y)$ は区間［0, u）上の density part $g(y)>0$ および $y=0$ での mass part $\alpha'\geqq 0$ と $y=u$ での mass part $\beta'\geqq 0$ とで構成される。

Theorem 3．u° を方程式 $V(t)=t$ の区間［0, r）における唯一つの根とし、また、

$\theta(y)=\exp\left\{-\int_0^y \dfrac{dt}{V(t)}\right\}$ とおく。 そうすると

$$F^0(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{V(x)}, & 0\leqq x<u^\circ\\ 1, & x\geqq u^\circ\end{cases}\quad;\quad G^\alpha(y)=\begin{cases}1-\{\theta(y)-\theta(u^\circ)\}, & 0\leqq y<u^\circ\\ 1, & y\geqq u^\circ\end{cases}$$

で与えられる cdfs の対（F^0,G^α）は非 0 和ゲーム (3) の一つの平衡点となり、このとき、対応する平衡値は

$M_1(F^0,G^\alpha)=[V(0)+V(u^\circ)]\,\theta(u^\circ)>0$; $M_2(F^0,G^*)=0$ となる。