1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

故障を伴うサーバーの ある年齢保全政策

01107945 *小柳 淳二 （KOYANAGI Junji） 鳥取大学工学部
01103205 河合 一 （KAWAI Hajime） 鳥取大学工学部

1 はじめに

本研究では、$M/M/1$ 待ち行列のサーバーが一定時間間隔で点検され、点検時に系内客数と稼動時間を考慮して、予防修理を施すかどうかを決定する問題を取り上げる。問題はセミーマルコフ決定過程で定式化され、最適政策の構造を明らかにする。

2 モデル

故障を伴うサーバーを持つ $M/M/1$ 待ち行列（到着率 λ、サービス率 μ）を取り上げ、サーバーの故障時間分布は分布関数 $F(t)$ に従うものとする。サーバーは一定時間間隔 T で点検され、点検時にサーバーが故障していれば、ただちに事後修理を施し、稼動していれば、予防修理を施すかどうかを決定するものとする。予防修理、事後修理によりサーバーは新品（年齢 0）に復帰し、事後修理、予防修理にかかる時間の分布関数は、それぞれ $H_1(x)$、$H_2(x)$ であるとする。($H_i(0)=0,\ H_i(\infty)=1$ $(i=1,2)$ とする）

客は到着時、サーバーが稼動していれば列に並ぶが、稼動していなければただちに立ち去り、また、いったん列に並んだ客もサーバーが故障した時、および予防修理が開始された時に、すべて立ち去るものとする。これら立ち去る客の人数 1 人あたり 1 単位のコストを課し、総期待割引コスト（割引率 α）を最小化するように、各点検時点で予防修理を行うかどうかを決定する。

3 記号および条件

$P_{ij}(t)$ 系内人数が i 人の状態から t 時間後に j 人になっている確率

$Q_i(t)$ 系内人数が i 人の状態から t 時間後の期待系内人数

$$Q_i(t)=\sum_{j=1}^{\infty} jP_{ij}(t)=i+(\lambda-\mu)t+\mu\int_0^t P_{i0}(x)dx$$

を定義する。

また、

$$h_i=\int_0^\infty e^{-\alpha t}\overline{H}_i(t)dt \ \ (\le 1/\alpha) \quad (i=1,2) \tag{1}$$

$$f_k=\frac{\overline{F}(kT)-\overline{F}(kT+T)}{\overline{F}(kT)} \tag{2}$$

$$\beta=e^{-\alpha T} \tag{3}$$

$$\overline{G}(x)=1-G(x) \tag{4}$$

$$N(t)=\frac{\lambda}{\alpha}(1-e^{-\alpha t}) \tag{5}$$

とおく。$N(t)$ はサーバーが t 時間稼動していない間に到着する客の総期待割引コストである。

ここで次のような条件をおく、

条件

C1. $F(x)$ は IFR.

C2. $\overline{H}_1(x)\ge\overline{H}_2(x)\ \ \forall x.$

C1. より $f_k\uparrow k$ である。また C2. は事後修理時間は予防修理時間より長くかかる傾向があることを示す。C2. より $h_1\ge h_2$ である。

4 セミーマルコフ決定過程による定式化

状態として、点検時の系内客数 i と、点検回数 k の組 (i,k) をとる。

$V(i, k)$ 状態 (i, k) からの最適総期待割引コスト関数

$D(i, k)$ ($\in \{0, 1\}$) 状態 (i, k) における最適アクション（0：予防修理、1：稼働を続ける）

とする。

状態 (i, k) で予防修理を行い、以後最適に振る舞った時の総期待割引コスト $A(i)$ は

$$\begin{aligned} A(i) &= i + \int_0^\infty (N(t) + V(0, 0)e^{-\alpha t})dH_2(t) \\ &= i + \lambda h_2 + (1 - \alpha h_2)V(0, 0) \qquad (6) \end{aligned}$$

となる。

また、状態 (i, k) で予防修理を行わず、以後最適に振る舞った時の総期待割引コスト $W(i, k)$ は

$$\begin{aligned} W(i, k) &= \beta(1 - f_k)\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(T)V(j, k+1) \\ &+ \int_0^T e^{-\alpha x}\frac{Q_i(x) + N(T - x)}{\overline{F}(kT)}dF(kT + x) \\ &+ \beta f_k[\lambda h_1 + (1 - \alpha h_1)V(0, 0)] \qquad (7) \end{aligned}$$

である。

(7) 式の第 1 項は次の点検時点までサーバーが故障しない時の総期待割引コストを表し、第 2 項は故障してから事後修理を始めるまでの総期待割引コストであり、第 3 項は次の点検時点でサーバーが故障しており事後修理を始めた以後の総期待割引コストである。

$V(i, k)$ は

$$V(i, k) = \min\{A(i), W(i, k)\} \qquad (8)$$

を満たす。

5 コスト関数の性質

$P_{ij}(x)$, $Q_i(x)$ に対して以下の補題が成立する。

補題 1

1. $\sum_{j=l}^{\infty} P_{ij}(t) \uparrow i \ \ \forall l.$
2. $Q_{i+1}(t) - Q_i(t) \leq 1.$

(6), (7), (8) 式に対して逐次近似法を適用し、補題 1 を用いて帰納的に以下の補題が成り立つ。

補題 2

1. $V(0, 0) \leq \lambda/\alpha$
2. $i + \lambda/\alpha \geq V(i, k) \ \ \forall i, k$
3. $\lambda h_1 + (1 - \alpha h_1)V(0, 0) \geq \lambda h_2 + (1 - \alpha h_2)V(0, 0)$

補題 3

$W(i, k) \uparrow k.$ □

略証）(7) 式を整理すると

$$\begin{aligned} W(i, k) &= \beta\Big[(1 - f_k)\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(T)V(j, k+1) \\ &+ f_k\{\lambda h_1 + (1 - \alpha h_1)V(0, 0) + Q_i(T)\}\Big] \\ &+ \int_0^T e^{-\alpha x}\frac{\overline{F}(kT) - \overline{F}(kT + x)}{\overline{F}(kT)}[\alpha Q_i(x) + \mu(1 - P_{i0}(x))]dx \end{aligned}$$

各項が k に関して単調増大である。

補題 4

$V(i+1, k) - V(i, k) \leq 1$, $W(i+1, k) - W(i, k) \leq 1.$ □

補題 3, 4 を合わせて次の補題を得る。

補題 5

$A(i) - W(i, k) \uparrow i, \downarrow k.$ □

補題 5 より最適政策の構造について次の定理を得る。

定理 1

$D(i, l) = 1$ ならば $D(j, k) = 1$ $(l \geq k,\ i \leq j).$ □

下図に最適政策の構造を示す。