1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

Stochastic Production Planningについて

01006755　　愛媛大学工学部　大橋　守 OHASHI Mamoru

1　はじめに

ある製品の需要率と在庫量に注目して、製品の適正な生産率を決める生産計画問題を考える[1] [2]。ここでは、製品の需要率がマルコフ連鎖に従ってランダムに変化するStochastic Production Planning問題に対するダイナミック・プログラミング方程式の数値解について考察する。

製品の在庫量が次の確率微分方程式で表せるものとする。

$$\frac{d}{dt}x(t)=u(t)-y(t), \qquad (1)$$

$$x(0)=x, \qquad y(0)=i$$

ただし，製品の在庫量を $x(t)\in R$，製品の生産率 $u(t)\in K=[0,\ d]$，マルコフ連鎖 $\{y(t), t\geq 0\}$ とする。このとき

$$J(u:x,i)=\mathbf{E}[\int_0^\infty e^{-\alpha t}\{h(x(t))+g(u(t))\}dt \mid x(0)=x,\ y(0)=i]$$

を最小にする生産率 $u(t)$ を決める。ここで、$h(x)$, $g(x)$ は単位時間当たりの在庫費用、生産費用とする。

マルコフ連鎖の状態空間 $S=\{1,2,...,s\}$ は有限で、生成行列 Λ を

$$\Lambda=\begin{pmatrix} -\lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1s} \\ \lambda_{21} & -\lambda_{22} & \dots & \lambda_{2s} \\ \dots & & & \\ \lambda_{s1} & \lambda_{s2} & \dots & -\lambda_{ss} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

$$\lambda_{ii}=\sum_{j\neq i}\lambda_{ij}, \qquad \lambda_{ij}\geq 0$$

とする。

ここでは以下の仮定のもとでStochastic Production Planning問題を考察する。

仮定 **(i)** 在庫費用 $h(x)$ は R の凸関数で、正の定数 k_1, k_2 に対して

$$-k_1\leq h(x)\leq k_2(1+|x|^2)$$

とする。

(ii) 生産費用 $g(u)$ は K の狭義凸関数とする。

(iii) $s\leq d$ とする。

2　最適方策

最適費用関数 $v(x,i)=\inf_u J(u:x,i)$ の性質を次に示す。

補題1 $v(x,i)$ はそれぞれの $i\in S$ に対して凸関数で

$$-k\leq v(x,i)\leq k(1+\mid x\mid^2) \qquad (3)$$

となる正の定数 k が存在する。

Stochastic Production Planning問題に対するダイナミック・プログラミング方程式は

$$\alpha v(x,i)+H(x,i,v'(x,i))-Lv(x,i)=0, \qquad (4)$$
$$x\in R, \quad i\in S$$

となる。ただし、

$$H(x,i,r)=-\inf_{u\in K}[h(x)+g(u)+(u-i)r], \qquad (5)$$

$$Lv(x,i)=\sum_{j\neq i}\lambda_{ij}[v(x,j)-v(x,i)] \qquad (6)$$

とする。

補題 2 $v(x,i)$ が viscosity solution で凸関数ならば、それぞれの $i \in S$ に対して $v'(x,i)$ は存在し、連続となる。

補題 3 $v(x,i)$ は viscosity solution となる。

定理 1 それぞれの $i \in S$ に対して

$$u^*(x,i) = \arg\min_{u \in K}[\, g(u) + u \cdot v'(x,i)\,] \quad (7)$$

は連続となる。

補題 4 u^* に対する方程式 (1) の解 $x^*(t)$ が

$$|x^*(t)| \le k, \qquad (t \ge 0)$$

となる正の定数 k が存在する。

定理 2 $v(x,i) = J(u^* : x, i)$ となる最適生産方策 u^* は (7) 式で与えられる。

3 数値例

次に最適費用関数 $v(x,i)$ と最適生産方策 u^* の数値例を示す。いま、

$$h(x) = x^2, \qquad g(u) = u^2,$$
$$K = [0,\ 3], \qquad S = \{1,\ 2\},$$
$$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、(1) 式は

$$\frac{d}{dt}x(t) = u^*(x(t), y(t)) - y(t), \qquad (8)$$
$$x(0) = x, \qquad y(0) = i$$

(7) 式は

$$u^*(x,i) = \begin{cases} 0 & v'(x,i) \ge 0 \\ -\frac{1}{2}v'(x,i) & -6 \le v'(x,i) < 0 \\ 3 & v'(x,i) < -6 \end{cases} \quad (9)$$

となる。また、$u^*(x,i) - i = 0$ となる x を $\hat{x}_i$ とすると、最適費用関数 $v(x,i)$ に対して次の関係が成り立つ。

$$v(\hat{x}_1, 1) - \frac{\hat{x}_1^2 + 1}{\alpha + 1} - \frac{1}{\alpha + 1}v(\hat{x}_1, 2) = 0 \quad (10)$$

$$v(\hat{x}_2, 2) - \frac{\hat{x}_2^2 + 4}{\alpha + 1} - \frac{1}{\alpha + 1}v(\hat{x}_2, 1) = 0 \quad (11)$$

$v(x,i)$ が凸関数の数値解を $\alpha = 0.05$ の場合について求めと、最適費用関数は Fig.1, 2 のようになる。また、最適生産方策 u^* は (9) 式より簡単に求めることができる。

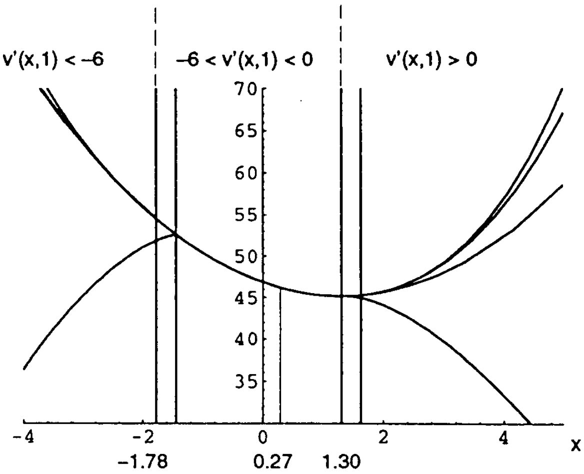

Fig. 1 最適費用関数 v(x,1)

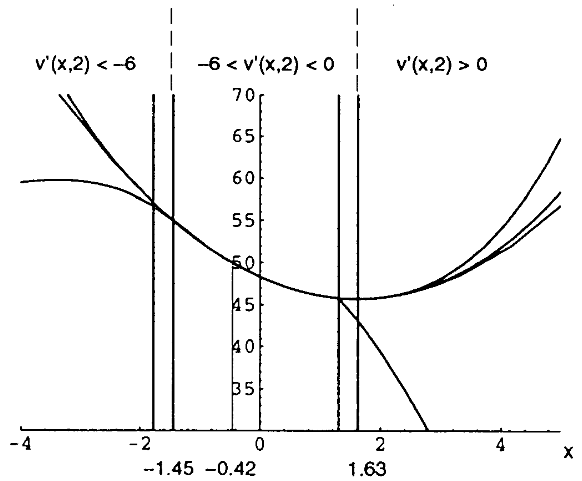

Fig. 2 最適費用関数 v(x,2)

参考文献

[1] R. Akella and P. R. Kumar, IEEE Trans. Automat. Contr., **AC-31**(1986), pp.116-126.

[2] W. H. Fleming, S. P. Sethi and H. M. Soner, SIAM J. Control and Optim., **25**(1987), pp.1494-1502.