1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

0－1ナップザック関数のすべての不連続点を見つける一つの方法

近畿大学・商経学部　林　芳男

1. はじめに

自然数nと各$j=1,2,\cdots,n$に対してそれぞれ重み、利益と呼ばれる二つの正の実数の組(w_j, p_j)と容量と呼ばれる正数Mを与えて作られる次の有名な0－1ナップザック問題(P)が考察対象である。

$$
(P)\quad \left|\begin{array}{ll} \text{目的関数} & p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n \longrightarrow \text{最大化}, \\ \text{制約条件} & w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n \leqq M, \\ & x_j = 0 \text{ 又は } 1 \ (j=1,2,\cdots,n) \end{array}\right.
$$

ここに、$x_j\ (j=1,2,\cdots,n)$は問題(P)の変数で0又は1のどちらかの値しか取れないものとする。この問題の最適な目的関数の値を制約条件の右辺の数Mに対する関数と見なしたものを$f(M)$で表わす．つまり、

$$
f(M)=\max\{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n : w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n \leqq M,\ x_j=0 \text{ 又は } 1\ (j=1,2,\cdots,n)\}
$$

とおく。これが与えられたナップザック問題に対する0－1ナップザック関数と呼ばれるものである．与えられた右辺の数(容量)Mに対する0－1ナップザック問題(P)をその値関数$f(\cdot)$を表す記号を用いて「問題$f(M)$」と言い表すことにする。

任意の右辺の数$M\geqq 0$に対する問題$f(M)$を解くことでさえ、それがNP完全な問題であるので、とても良い解法(多項式時間で解くことができる解法)が存在しそうにもない難しい問題であるのに、ここではその0－1ナップザック関数$f(\cdot)$の形状を決定すること、つまり、すべての右辺の数$M\geqq 0$に対する問題$f(M)$を解くことが本発表の課題である。

2. 0－1ナップザック関数の形状、自明な不連続点、不連続点の総数

0－1ナップザック関数$f(M)$は、$M\geqq 0$で定義された実関数で、明らかに、$f(0)=0$，$M\geqq w_1+w_2+\cdots+w_n$に対しては$f(M)=p_1+p_2+\cdots+p_n$を満たす。$0<M<w_1+w_2+\cdots+w_n$なる右辺の数$M$に対する$f(M)$の値は問題(P)を解かなければ分からない。解の個数は2^n個であるから、変数の個数nが少なければ強引に解の総当たりをして見つけることは可能であるが、そのようなやり方で$f(\cdot)$の形状を明らかにすることは非現実的である．もっとその性質を詳しく調べて見よう．

0－1ナップザック関数$f(\cdot)$は広義に単調増大な関数である、つまり、$M_1<M_2$ならば$f(M_1)\leqq f(M_2)$である。

もっと詳しくその形状を知るために、最初のk変数$x_1, x_2, \cdots, x_k$についての0－1ナップザック問題の値関数を$f_k(\cdot)$で表そう。すなわち、任意の非負の数Mに対して

$$
f_k(M)=\max\{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_kx_k : w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_kx_k \leqq M,\ x_j=0 \text{ 又は } 1\ (j=1,2,\cdots,k)\}
$$

とおく。$f_1(\cdot)$及び$f_2(\cdot)$は強引に解いて、右連続な階段関数であることが容易に分かる。少し冷静に考えてみると一般の$f(\cdot)$も右連続な階段関数であることが分かる．その考察過程から$f(\cdot)$の連続点、不連続点の特徴付けが次のように行える。

(i) 点$M>0$が0－1ナップザック関数$f(\cdot)$の連続点であるための必要十分条件は問題$f(M)$の最適解x^*で$w\cdot x^*<M$なるものが存在することである．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

(ii) 点 $M \geq 0$ が 0-1 ナップザック関数 $f(\cdot)$ の不連続点であるための必要十分条件は問題 $f(M)$ の最適解 x^* はすべて $w \cdot x^* = M$ を満足しなければならないことである。

さて、任意の添字 k ($=1, 2, \cdots, n$) に対して、問題 $f_k(M)$ の最適解では x_k は 0 かまたは 1 であるから、明らかに、

$$f_k(M) = \max\{f_{k-1}(M),\ f_{k-1}(M - w_k) + p_k\}$$

が成り立つ。この公式は DP の最適性原理による公式と呼ばれる。各 $k = 0, 1, \cdots, n$ に対して、$M < 0$ のとき $f_k(M) = -\infty$; $M \geq 0$ に対しては $f_0(M) = 0$ とおけば、この公式を使えば、各 $M \geq 0$ に対する $f(M) = f_n(M)$ の値は $O(nM)$ の手間で見付けることができる。$M < 0$ のとき $f(M) = -\infty$ と約束したので、全実数領域 M で $f(M)$ を考えると、$M = 0$ は不連続点と見なすことができる。$M = w \cdot 1$ も自明な不連続点である。$w_{min} = \min\{w_j : j = 1, 2, \cdots, n\}$ とおくと、$M = w_{min}$ も不連続点である。

さて、与えられた k ($=3, \cdots, n$) に対して $f_{k-1}(\cdot)$ は有限個の不連続点 $\{U_r^{(k-1)} : r = 0, 1, \cdots, L_{k-1}\}$ を持つと仮定しよう。ここに、

$U_0^{(k-1)}(=0) < U_1^{(k-1)}(=w_{min}^{(k-1)}) < U_2^{(k-1)} < \cdots < U_{L_{k-1}}^{(k-1)}$; $w_{min}^{(k-1)} = \min\{w_j : j = 1, \cdots, k-1\}$, $U_{L_{k-1}}^{(k-1)} = \sum_{j=1}^{k-1} w_j$ で L_{k-1} は $f_{k-1}(\cdot)$ の 0 以外の不連続点の個数である。また、各 $r = 0, 1, \cdots, L_{k-1}$ に対して $R_r^{(k-1)} = f_{k-1}(U_r^{(k-1)})$ とおくと、

$R_0^{(k-1)}(=0) < R_1^{(k-1)}(=p_{min}^{(k-1)}) < R_2^{(k-1)} < \cdots < R_{L_{k-1}}^{(k-1)}(=\sum_{j=1}^{k-1} p_j)$

となる。DP の最適性の原理による公式から $f_k(\cdot)$ の不連続点のすべては二つの集合 $\{U_r^{(k-1)} : r = 0, 1, \cdots, L_{k-1}\}$ と $\{U_r^{(k-1)} + w_k : r = 0, 1, \cdots, L_{k-1}\}$ の中にある。これら二つの集合を併合・整列して不要なものを捨てれば $f_k(\cdot)$ の不連続点がすべて得られる。その二つの集合は始めから整列されているから一般的な併合・整列のアルゴリズムを使う必要はなく、簡単に二組のトランプの山をシャッフルするようにしてできる。第一のカード群の最小のもの $U_0^{(k-1)}(=0)$ は $f_k(\cdot)$ の自明な不連続点 $U_0^{(k)}$ となる。その次の不連続点は $U_1^{(k-1)}$ と $U_0^{(k-1)} + w_k$ を比較して小さい方が $U_1^{(k)}(=w_{min}^{(k)})$ であるとして選ばれる。さて、r 番目の $f_k(\cdot)$ の不連続点 $U_r^{(k)}$ が決まり、残っている第一カード群の最小のものが $U_s^{(k-1)}$、第二カード群の最小のものが $U_{s'}^{(k-1)} + w_k$ であるとする。その添字の番号 s と s' は当然、$R_r^{(k)} < R_s^{(k-1)}$ かつ $R_r^{(k-1)} < R_{s'}^{(k-1)} + p_k$ であるまでカードを捨てて進められてある。その次の $(r+1)$ 番目の $f_k(\cdot)$ の不連続点 $U_{r+1}^{(k)}$ は $U_s^{(k-1)}$ と $U_{s'}^{(k-1)} + w_k$ の小さい方である。引くのときは目的関数の値が大きい方が選ばれもう一つのカードは捨てられる…というふうにして決まっていく。第一カード群が先に無くなり残った第二カード群のカードはすべてその順番で $f_k(\cdot)$ の不連続点となる。その 0 でないものの個数を L_k とすると、各 $k = 1, 2, \cdots, n$ に対して $L_{k-1} + 1 \leq L_k \leq 2L_{k-1} + 1$ となる。ただし、$L_0 = 0$ とする。したがって、帰納的に、0-1 ナップザック関数 $f(\cdot)$ は有限個の不連続点を持つ右連続な階段関数であることが証明された。その 0 でない不連続点の個数を L とすると、$n \leq L \leq 2^n - 1$ となる。

そのシャッフルによるアルゴリズムの計算時間複雑度は $O(n(L+1))$ でその入出力データの個数の多項式時間程度である。そのすべての不連続点は 0 を根とする木構造でコンパクトに記憶することができる。

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.