1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

木構造ネットワークにおける部分木配置とナップサック問題

02201680　東京工業大学　繁野麻衣子　SHIGENO Maiko
02201890　東京工業大学　*塩浦 昭義　SHIOURA Akiyoshi

1　はじめに

頂点集合を V, 枝集合を E とする連結な木 $T=(V,E)$ と各枝 $uv \in E$ の長さ $l_{uv}\ (>0)$ が与えられている. 2頂点 v, w を結ぶ道に含まれる枝の長さの和を v, w 間の距離 $d(v,w)$ とする. 部分木 $S(\subseteq T)$ に対し, 頂点 $v \in V$ から S への距離を $d(v,S)=\min\{d(v,w) \mid w \in V(S)\}$ とし, S の大きさを S に含まれる枝の長さの総和で定義する. 与えられた整数 $L(\geq 0)$ に対し, できるだけ T の中心に大きさ L 以下の連結な部分木 S を配置する問題を**部分木配置問題**と呼ぶ.

部分木 S の配置の基準として, 最遠点からの距離 $ecc(S)=\max\{d(v,S) \mid v \in V\}$, 及び全点からの距離和 $dis(S)=\sum\{d(v,S) \mid v \in V\}$ を使い, これらの値が小さいほど S は中心に位置するものとみなす. $ecc(S)$ を最小にする, 大きさ L 以下の連結な部分木を大きさ L の**中心木** (tree center) と呼び, $dis(S)$ を最小にする, 大きさ L 以下の連結な部分木を大きさ L の**中央木** (tree median) と呼ぶ. また, 部分木 S が枝 $uv \in E$ を部分的に含むことも許す. すなわち, T の各枝 uv に新たに頂点 p を挿入し, uv を二つの新しい枝 up, pv で置き換えた木 $T'=(V',E')$ 上に S を配置する. ただし, up, pv の長さ l'_{up}, l'_{pv} は $l'_{up}+l'_{pv}=l_{uv}$ を満たすように適当に決める. 木 T の枝を**完全枝**と呼び, $up, pv(\in E')$ を $uv(\in E)$ の**部分枝**と呼ぶ.

本稿では, 表1に示す4種類の部分木配置問題を扱う. それぞれの配置問題をナップサック型問題と対応付けることにより, $O(|E|)$ 時間, つまり線形時間の解法, またはNP-困難性を示す.

表1：部分木配置問題の分類

目的 \ 制約	完全枝のみ	部分枝を許す
$ecc(S)$ 最小	離散中心木問題	連続中心木問題
$dis(S)$ 最小	離散中央木問題	連続中央木問題

2　部分木配置問題

2.1　離散中心木問題

離散中心木問題は次のように定式化される.

$$
\text{(CF1)}\left|\begin{array}{ll}
\text{min.} & ecc(S) \\
\text{sub. to} & \sum\{l_{uv} \mid uv \in E(S)\} \leq L, \\
 & S \text{ は } T \text{ の連結な部分木.}
\end{array}\right.
$$

大きさ0の離散中心木を特に**中心頂点** (vertex center) と呼ぶ.

補題 1 [3]　頂点 r が中心頂点ならば, 任意の L に対し, r を含む大きさ L の中心木が存在する. ■

従って, ある中心頂点 r を含む部分木だけを考えれば十分である.

補題 2　中心頂点 r に対し, 枝 $uv \in E$ が $d(r,u) < d(r,v)$ を満たすとき,
$a_{uv}=\max\{d(u,w) \mid u$ と wを結ぶ道は vを含む$\}$
とする. このとき, r を含む連結な部分木 S に対して

$$ecc(S)=\max\{a_{uv} \mid uv \in E \setminus E(S)\}$$

が成り立つ. ■

0-1 変数 $x_{uv}\ (uv \in E)$ に対し, $F=\{uv \in E \mid x_{uv}=0\}$ とし, Fが誘導する部分木を $S[F]$ とする. $L'=\sum\{l_{uv} \mid uv \in E\}-L$ とおくと, (CF1) は次のように変形できる.

$$
\text{(CF2)}\left|\begin{array}{lll}
\text{min.} & \max\{a_{uv}x_{uv} \mid uv \in E\} & \\
\text{sub. to} & \sum\{l_{uv}x_{uv} \mid uv \in E\} \geq L', & (1) \\
 & S[F] \text{ は } T \text{ の連結な部分木,} & (2) \\
 & x_{uv} \in \{0,1\} \quad (uv \in E). & (3)
\end{array}\right.
$$

補題 3　(CF2) の最適解で

$$\forall uv, yz \in E,\ a_{uv} \geq a_{yz} \Rightarrow x_{uv} \leq x_{yz} \quad (4)$$

を満たすものが存在する. 逆に, x が条件 (3), (4) を満たすならば条件 (2) は成立する. ■

補題3より, 次の問題 (CF3) の最適解は (CF2) においても最適である.

$$
\text{(CF3)}\left|\begin{array}{ll} \text{min.} & \max\{a_{uv}x_{uv} \mid uv \in E\} \\ \text{sub. to} & (1),\ (3),\ (4). \end{array}\right.
$$

(CF3) から条件 (4) を除いた問題は目的関数がミニマックス型の 0-1 ナップサック問題 (MMKP) である. (MMKP) の最適解の中には条件 (4) を満たすものが必ず存在し, そのような解は次の算法で求められる.

```
Algorithm MINIMAX_KNAPSACK;
begin
  if L' ≤ 0 then
    for i' ∈ E do x_{i'} = 0;
  else
    I := E;
    N := 0;
    while |I| > 1 do
      find a median a_k in {a_i | i ∈ I};
      M := Σ{l_i | i ∈ I, a_i ≤ a_k};
      if N + M < L' then
        N := N + M;
        I := I \ {i ∈ I | a_i ≤ a_k};
      else
        I := I \ {i ∈ I | a_i > a_k};
      endif;
    end;
    let i* be a unique element in I;
    for i' ∈ {i ∈ E | a_i ≤ a_{i*}} do x_{i'} := 1;
    for i' ∈ {i ∈ E | a_i > a_{i*}} do x_{i'} := 0;
  endif;
end.
```

この算法の各反復ごとに I の要素数は半分になり, $\{a_i \mid i \in I\}$ の中央値は $O(|I|)$ 時間で求められることから [1], MINIMAX_KNAPSACK は $|E|$ の線形時間で (MMKP) を解く.

T の中心頂点は $O(|E|)$ 時間で得られ [4], 全ての枝 $uv \in E$ に対し, 補題 2で定義した a_{uv} も $O(|E|)$ 時間で求められるので, 次の定理を得る.

定理 4 離散中心木問題は 0-1 ミニマックス・ナップサック問題に帰着でき, $O(|E|)$ 時間で解ける. ■

2.2 連続中心木問題

連続中心木問題 (CP) は連続スケジューリング問題 (CSP) に帰着可能である.

$$
\text{(CSP)}\left|\begin{array}{ll} \text{min.} & \max\{l_{uv}x_{uv} + b_{uv} | uv \in E, x_{uv} > 0\} \\ \text{sub. to} & \sum\{l_{uv}x_{uv} \mid uv \in E\} \geq L', \\ & 0 \leq x_{uv} \leq 1 \quad (uv \in E). \end{array}\right.
$$

連続スケジューリング問題は線形時間で解けるので, (CP) の線形時間解法が示せる.

2.3 離散中央木問題

部分和問題 (subset-sum problem) を離散中央木問題 (MF) に帰着でき, (MF) は NP-困難であることがいえる. 「部分木 S は 必ず頂点 r を含む」 という制約を (MF) に加えると, 次の問題 (MF(r)) に変形できる.

$$
\text{(MF}(r))\left|\begin{array}{ll} \text{min.} & \sum\{a_{uv}x_{uv} \mid uv \in E\} \\ \text{sub. to} & \sum\{l_{uv}x_{uv} \mid uv \in E\} \leq L, \\ & S[E\backslash F] \text{ は } T \text{ の連結な部分木}, \quad (5) \\ & x_{uv} \in \{0,1\} \quad (uv \in E). \end{array}\right.
$$

T の全頂点に対して (MF(r)) を解けば (MF) の解が得られる. (MF(r)) から条件 (5) を除くと 0-1 ナップサック問題 (KP) になるが, (MF(r)) を (KP) に完全に帰着させることはできない. (KP) での貪欲算法に修正を加えると (MF(r)) の近似解を得ることができる. また, (MF(r)) は動的計画法により $O(L^2|E|)$ 時間で厳密に解ける. さらに, (MF) については工夫することによって $L > 0$ のとき, $O(L^2|E|\log|E|)$ 時間で解ける.

2.4 連続中央木問題

連続中央木問題 (MP) は (KP) の連続緩和問題 (CKP) に帰着できる. (CKP) は線形時間で解けるので [2], (MP) は $O(|E|)$ 時間で解ける.

参考文献

[1] Cormen, T. H., Leiserson, C. E. and Rivest, R. L. (1990), *Introduction to Algorithms*, The MIT Press, Massachusetts.

[2] Martello, S. and Toth, P. (1990), *Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations*, John Wiley & Sons, Chichester.

[3] Minieka, E. (1985), "The Optimal Location of a Path or Tree in a Tree Network," *Networks*, **15**, 309–321.

[4] Rosenthal, A. and Pino, J. A. (1989), "A Generalized Algorithm for Centrality Problem on Trees," *J. ACM*, **36**, 349–361.