多次元非線形ナップザック問題のヒューリスティック解法

会員番号 01011845 岡山理科大学 *岩崎　彰典 IWASAKI Akinori
岡山理科大学大学院 亀高　哲夫 KAMETAKA Tetsuo
会員番号 01011425 岡山理科大学 太田垣　博一 OHTAGAKI Hirokazu
会員番号 01402374 関西大学 仲川　勇二 NAKAGAWA Yuji
会員番号 01400565 岡山理科大学 成久　洋之 NARIHISA Hiroyuki

１．まえがき

多次元非線形ナップザック問題の近似解を代理制約法を用いて求める方法を提案する．代理制約法は, 代理乗数を用いて与えられた問題（原問題）を代理問題と呼ぶ一次元問題に書き直す．この代理問題の厳密解は原問題の一つの上限値を与え, 代理双対問題はこの上限値を最少にするような代理乗数の最適化問題として定式化される．原問題が準凸な非線形計画問題であれば, 代理乗数を正しく定めることにより代理問題の解は原問題の最適解となる．ところが, 多次元非線形ナップザック問題から変換された代理双対問題を解いた場合, 原問題の離散性により代理ギャップが存在し, 解は原問題の実行可能解とはならないことが多い（もし, 実行可能解となればその解は原問題の最適解である）．代理双対問題の解が実行不可能な場合, ヒューリスティックな方法で原問題の実行可能な近似解を求める方法を提案する．計算機実験によって本解法によって品質のよい近似解が得られることを示す．

２．代理制約法による多次元非線形ナップザック問題のヒューリスティク解法

多次元非線形ナップザック問題は次のように定式化される．

［K］

$$\text{maximize} \quad f(x) = \sum_{n \in \mathcal{N}} f_n(x_n), \tag{1}$$

$$\text{subject to} \quad g_m(x) = \sum_{n \in \mathcal{N}} g_{mn}(x_n) \le b_m, \tag{2}$$

$$x_n \in \mathcal{A}_n, \tag{3}$$

ここで, $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots, N\}$, $\mathcal{A}_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nk}, \ldots, a_{nK_n}\}$, m は制約式の番号, b_m は各制約式に対する制約許容量である．

問題［K］に対する代理双対問題［ＳＤ］は次式で定式化される．

［ＳＤ］

$$\min\{\text{opt}[S(u)] : u \in U^1\}, \tag{4}$$

ただし,opt$[P']$ は問題 P' の最適な目的関数値, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_{M-1})^T \in R^{M-1}$, $U^1 = \{u \in R^{M-1} : \sum_{m \in \mathcal{M}} u_m \le 1, u > 0\}$, $\mathcal{M} = \{1, \ldots, m, \ldots, M-1\}$, である．

ここで $S(u)$ は代理問題と呼ばれ次式で与えられる．

$$S(u) : \max\{f(x) : \varphi(u, x) \le \beta, x \in \mathcal{A}\}, \tag{5}$$

ただし,

$$\varphi(u, x) = \sum_{m \in \mathcal{M}} u_m\{g_m(x) - g_m(x)\} + g_M(x),$$

$$\beta = \sum_{m \in \mathcal{M}} u_m\{b_m - b_M)\} + b_M,$$

である.β を代理制約許容量と呼ぶ.

(4)式を解くことによって得られる解を x^{SD} そのときの最適化された u を u^{SD} とする. x^{SD} は問題[K] の離散性による代理ギャップが存在し実行可能解にならないことが多い. そこで x^{SD} からヒューリスティックな方法で実行可能な近似解を求める方法を考える.

$$\beta' = \sum_{m\in\mathcal{M}} u_m^{SD}\{\sum_{n\in\mathcal{N}} g_{nm}(x_n^{SD}) - \sum_{n\in\mathcal{N}} g_{nM}(x_n^{SD})\} + \sum_{n\in\mathcal{N}} g_{nM}(x_n^{SD}), \tag{6}$$

とすれば, $\beta' \leq \beta$ となるので, 次の縮小された実行可能領域を持つ代理問題が生成できる.

$$S'(u^{SD}) : \max\{f(x) : \varphi(u^{SD}, x) < \beta', x \in \mathcal{A}\}. \tag{7}$$

(7)式の解を x' とすれば,(7)式は制約式に等号を含んでいないので必ず $x' \neq x^{SD}$ が成立し, x' の与える目的関数値は x^{SD} の与える目的関数値に等しいか小さくなる. そこで, x^{SD} を x' で置き直し上記操作を繰り返せば実行可能領域は順次縮小され, この操作を実行可能解が得られるまで繰り返す.

3. ヒューリスティック解法のためのアルゴリズム

本ヒューリスティック解法には2つのアルゴリズムが必要である. 一つは代理問題の厳密解法であり, もう一つは代理乗数の最適化のアルゴリズムである. 我々は代理問題の厳密解法としてモジュラアプローチと, 代理乗数の最適化のためにCOPアルゴリズムを用いた.

3.1 モジュラアプローチ

代理問題は単一制約非線形ナップザック問題である. 我々はその厳密解法としてモジュラアプローチ(MA)を用いた. MAは単一制約で変数分離可能な問題を効率よく解くことができる. MAはDPと同様にボトムアップ的な手法であり, 次の(1)(2)の操作を変数の数が1つになるまで繰り返す.

(1)各変数に対して深測操作を行い各変数を構成する要素 a_{nk} の数を減らす.

(2)複数の変数を統合して1つの変数にし, 変数の数を減らす.

変数が1つになった問題から, 与えられた問題の最適解を求めるのは容易である.

3.2 COPアルゴリズム

代理乗数 u を最適化するために, 我々はCOP(Cutting-off Polyhedron)アルゴリズムを用いた. COPは次式の初期多面体 U^1 から出発する.

$$U^1 = \{u \in R^{M-1} : \sum_{m\in\mathcal{M}} u_m \leq 1, u > 0\}.$$

第 k 番目の多体面を U^k, その重心を u^k, その u^k に対する代理問題 $S[u^k]$ の解を x^k とする. このとき多体面 U^k を切断して作られる新しい多面体 U^{k+1} は次式で与えられる.

$$U^{k+1} = U^k \cap \{u \in R^{M-1} : \varphi(u, x^k) \leq \beta\}. \tag{8}$$

(9)式に基づいて $U^{k+1} = \phi$ になるまで多面体を切断し, 順次縮小することにより, 最適な代理乗数 u^{SD} を求めることができる.

4. 計算機実験

本研究で考察した方法の有効性を確かめるため, 制約条件式の数が3および5の場合について目的関数, 制約関数が整数値をとる問題に対して計算機実験を行った. 代理双対問題を解いて得られる上限値と, 本ヒューリスティック解法による近似解の与える目的関数値を比較した結果, 問題の規模に依存せず品質の良い近似解が得られることが分かった.

5. むすび

本研究では, 多次元非線形ナップザック問題を代理制約法を適用したヒューリスティック解法について考察した. 計算機実験の結果は, 解の品質において本手法の有効性を裏付けている.