1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

選択組立におけるマッチング算法

01012384 京都大学 岩田 覚 IWATA Satoru
01605000 東京大学 ＊松井 知己 MATSUI Tomomi

1 はじめに

最近, 当学会誌上において, 自動車部品の選択組立に最小費用マッチングを応用する事例研究が報告されている [5]. 本発表では, ここで用いられたモデルを含む, 特殊な最小費用マッチング問題を解く高速算法を提案する.

2 問題設定

軸部品と穴部品とを組み合わせて半製品を作る工程を考える. 軸部品と穴部品との間には, 隙間に関する規格があり, 最大隙間 $\overline{C}$ と最小隙間 $\underline{C}$ が定められている. すなわち, 軸部品 i の軸径を D_i, 穴部品 j の穴径を R_j とすると,

$$\underline{C} \le R_j - D_i \le \overline{C}$$

のときに限って, 軸部品 i と穴部品 j が組み立て可能である. 大量に生産された軸部品と穴部品とを適切に組み合わせることによって, できるだけ沢山の半製品が出来る様にすると同時に, 組み立てられた半製品において, 隙間がなるべく小さくなるようにしたいというのが [5] での問題であり, 以下の様に解決されている.

軸部品の集合を U, 穴部品の集合を W とし, 組み立て可能な軸部品と穴部品の組を E として, 2部グラフ $G = (U, W; E)$ を定義する. 枝 $(i,j) \in E$ 上の "費用" を

$$c_{ij} = (R_j - D_i)^2$$

によって定め, G における最大マッチングのうちで費用最小のものを求めれば, 理想的な選択組立が可能となる.

軸部品と穴部品が, それぞれ, 径の小さい順に番号付けられているものとする. このとき, 2部グラフ G と費用 c は以下の様な特徴を有している.

[P0] $(i,l) \in E$, $(k,j) \in E$, $i \le p \le k$, $j \le q \le l \Longrightarrow (p,q) \in E$.

[P1] $(i,l) \in E, (k,j) \in E, i \le k, j \le l \Longrightarrow$ $c_{ij} + c_{kl} \le c_{il} + c_{kj}$.

[P2] $(i,j) \in E, (k,j) \in E, i \le k \Longrightarrow$ $c_{ij} \ge c_{kj}$.

[P3] $(i,j) \in E, (i,l) \in E, j \le l \Longrightarrow$ $c_{ij} \le c_{il}$.

性質 [P1] は, しばしば, Monge 性, あるいは完全単調性と呼ばれている. Monge 性を有する費用に関する Hitchcock 型輸送問題 (総供給量と総需要量は一致) が貪欲算法 (北西隅法) で解けることが知られている [3, 4]. 性質 [P2] と [P3] において, 不等号の向きが逆になっていることに注意する.

3 算法

性質 [P0] を満たす2部グラフ G 上で [P1]–[P3] を満たす費用 c に関する最小費用最大マッチングを求める算法を提示する.

性質 [P0] より, $U \times W - E$ を

$$\begin{aligned}(k,j) \in \overline{E}, i \le k, j \le l &\Longrightarrow (i,l) \in \overline{E},\\ (i,l) \in \underline{E}, i \le k, j \le l &\Longrightarrow (k,j) \in \underline{E}\end{aligned}$$

を満たす $\overline{E}$ と $\underline{E}$ に分割できる. 特に, 選択組立問題においては,

$$\begin{aligned}\overline{E} &= \{(i,j) \mid R_j - D_i > \overline{C}\},\\ \underline{E} &= \{(i,j) \mid R_j - D_i < \underline{C}\}\end{aligned}$$

とすればよい. 本算法中では, 枝集合 E を陽に持つのではなく, 与えられた (i,j) が $\underline{E}, E, \overline{E}$ のいずれに属するかの判定を行なう.

いわゆる北西隅法を適用し, 得られるマッチングを M^* とする:

Algorithm NORTH-WEST;
begin
$M := \emptyset$; $i := 1$; $j := 1$;
while $i \le |U|$ & $j \le |W|$ **do**
begin

```
    if (i,j) ∈ E then
    begin
      M := M ∪ {(i,j)};
      i := i + 1; j := j + 1
    end;
    if (i,j) ∈ Ē then i := i + 1;
    if (i,j) ∈ E̲ then j := j + 1
  end
end.
```

性質[P0]より，M^* が最大マッチングであることが保証される [2]．また，[P1] と [P3] を用いて，$|M^*| = |U|$ であれば M^* が最小費用最大マッチングであることを示すことができる．

一方，"南東隅法" も適用し，得られたマッチングを $M^\sharp$ とする:

```
Algorithm SOUTH-EAST;
begin
  M := ∅; i := |U|; j := |W|;
  while i > 0 & j > 0 do
  begin
    if (i,j) ∈ E then
    begin
      M := M ∪ {(i,j)};
      i := i - 1; j := j - 1
    end;
    if (i,j) ∈ Ē then j := j - 1;
    if (i,j) ∈ E̲ then i := i - 1
  end
end.
```

北西隅法の場合と同様に，$M^\sharp$ は最大マッチングである．さらに，$|M^\sharp| = |W|$ であれば，[P1] と [P2] より，$M^\sharp$ は最小費用となるとなることが示される．

一般には，M^* も $M^\sharp$ も最小費用を達成するとは限らない．しかし，両者を以下の様に融合することによって，最小費用を達成することができる．部分グラフ $H = (U, W; F)$ を $F = M^* \cup M^\sharp$ によって定め，H の連結成分分解を行なう．各連結成分は，孤立点，孤立枝か，偶数長の道になっている．孤立枝の集合を F°，両端が W に属する偶数長の道を構成する枝の集合を F^*，両端が U にある偶数長の道に属する枝の集合を $F^\sharp$ とすると，

$$M^\circ = F^\circ \cup (M^* \cap F^*) \cup (M^\sharp \cup F^\sharp)$$

は最小費用最大マッチングとなる．

北西隅法も南東隅法も，(i,j) が $\underline{E}$, E, $\overline{E}$ のいずれに属するかの判定が定数時間でできれば，$O(|U| + |W|)$ の計算時間で実行可能である．部分グラフ H は枝の本数が点の個数の高々倍なので，$O(|U| + |W|)$ の計算時間で連結成分分解される．したがって，[P0]–[P3] を満たすような最小費用マッチング問題は，点の個数に対して線形の計算時間で解くことができる．

4 おわりに

本稿では記述を簡潔にするため，マッチング問題のみについて述べたが，[P0]–[P3] を満たす 2 部ネットワーク上の最小費用最大流も，同様にして，点の個数に対して線形の計算時間で求めることができる．選択組立に限らず様々な局面での応用を考える際に，重要と思われる．

参考文献

[1] A. Aggarwal, A. Bar-Noy, S. Khuller, D. Kravets, and B. Schieber: Efficient minimum cost matching using quadrangle inequality, *Proceeding of the 33rd Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, IEEE, 1992, pp. 583–592.

[2] F. Glover: Maximum Matching in a Convex Bipartite Graph, *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 14 (1976), pp. 313–316.

[3] A. J. Hoffman, On simple linear programming problems, *Convexity: Proceedings of Symposia in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 7 (V. Klee ed.), AMS, 1963, pp. 317–327.

[4] R. Shamir and B. Dietrich: Characterization and algorithms for greedily solvable transportation problems, *Proceeding of the First ACM/SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SIAM, 1990, pp. 358–366.

[5] 山田・古林: 選択組立における組合せ最適化 — 自動車エンジンの事例，オペレーションズ・リサーチ，Vol. 39 (1994), No. 10, pp. 556–560.