1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

パソコン向け信頼性評価ソフトウェアパッケージツール

愛知工業大学　福本　聡
広島大学　尾崎俊治

1. まえがき

近年，システムの信頼性をマルコフモデルによって評価するためのソフトウェアパッケージツールが多く開発されている[1]．これらは，モデル化されたシステムの状態確率を固有値問題の解法やシミュレーションなどによって求め，それを基に種々の信頼性評価量を算出するものである．そして，いずれも出力を得るまでに膨大な計算量と作業領域を要するため，汎用計算機上で構築されてきた[2]-[4]．

本研究では，比較的小規模な評価モデルを対象とし，パーソナルコンピュータ上で動作可能な信頼性評価ソフトウェアパッケージツールの研究開発を行った．

開発したツールの基本的な計算原理は，評価するシステムを連続時間マルコフ連鎖によってモデル化し，離散時間マルコフ連鎖変換法によってその解を数値的に求めることにある．これによって得られた状態確率ベクトルを基に信頼性評価量を算出する．ツールの構成は，入力データおよび評価量計算を処理する入出力モジュールと，離散時間マルコフ連鎖変換法を用いた状態確率算出のためのカーネルモジュールとからなる．また，パーソナルコンピュータ上で具体的にこのツールを実現するため，マルコフ連鎖の収束時刻の概念の導入など，記憶領域や計算速度を確保するための技法を用いた．

最近のパーソナルコンピュータでは性能に著しい進展があるため，本研究で開発したツールはかなり実用的なツールとなった．従来形評価ツールでの汎用機操作の煩雑さや，精度，ランニングコスト等の問題を解決でき，MS-DOS 上のアプリケーションとして多くの研究•開発の場で使用することが可能である．

2. 離散時間マルコフ連鎖変換法

以下に，ツールの基本的な計算手法である離散時間マルコフ連鎖変換法の概要を述べる．

状態数 Nの連続時間マルコフ連鎖の時刻 t における状態確率ベクトル

$$\pi(t) = \{\pi_1(t), \pi_2(t), \cdots, \pi_N(t)\} \tag{1}$$

は，初期確率ベクトル$\pi(0)$と連続時間マルコフ連鎖の無限小生成行列Qにより

$$\pi(t) = \pi(0)[I + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Qt)^n}{n!}]$$

として与えられる．Iは単位行列である．ここでQ行列に対して

$$P = Q/\Lambda + I. \tag{2}$$

なる変換を行う．ただし，ΛはQ行列の対角要素 q_{ii} について，$\Lambda = \max_i |q_{ii}|$ である．ここで得られたP行列は離散時間マルコフ連鎖の推移確率行列である．(2) 式の変換により (1) 式は

$$\pi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \{\frac{(\Lambda t)^n}{n!} e^{-\Lambda t} \cdot \phi(n)\}. \tag{3}$$

となる．よって，$\pi(t)$はポアソン分布と離散時間マルコフ連鎖の状態確率ベクトル$\phi(n)$ ($\phi(0) = \pi(0)$) との積の無限級数として表されていることが分かる．しかし，実際には，無限級数の代わりに有限和により計算するため

$$\pi^{\varepsilon}(t) \equiv \sum_{n=0}^{T(\varepsilon,t)} \{\frac{(\Lambda t)^n}{n!} e^{-\Lambda t} \cdot \phi(n)\} \tag{4}$$

とする．ここで，

$$T(\varepsilon, t) = \min[k : \sum_{n=0}^{k} \frac{(\Lambda t)^n}{n!} e^{-\Lambda t} > 1 - \varepsilon]. \tag{5}$$

であり，εはポアソン分布の受容誤差である．

3. 解の収束時刻の設定

連続時間マルコフ連鎖がエルゴード的であれば，過度解は $t \to \infty$ において定常解πに収束することが知られている．しかし実際には，許容誤差の範囲内で過度解が定常解に収束したとみなせる時刻 t_s が存在する．

離散時間マルコフ連鎖変換法により得られた離散時間マルコフ連鎖の状態確率ベクトル$\phi(n)$は，連続時間マルコフ連鎖の定常解πに収束することが知られており，

$$\lim_{n\to\infty} \phi(n) = \lim_{n\to\infty} \phi(0)P^n = \pi. \tag{6}$$

である．この性質を用いて，まず，$\phi(n)$ が十分にπに収束したと見なせるステップ数 n_sを設定する．具体的には，第 n ステップの状態確率ベクトル成分$\phi_j(n)$, $(j = 1, \cdots, N)$ について

$$[\max_j|\phi_j(n+1) - \phi_j(n)|] < \varepsilon_2, \tag{7}$$

を満たすような n のうち最小のものを n_sとする．ただし，ε_2は打ち切り誤差である．この n_sを用いて連続時間マルコフ連鎖の収束時刻を

$$t_s = \frac{2n_s + k^2 + k\sqrt{k^2 + 4n_s}}{2\Lambda}, \tag{8}$$

により設定する．ここで，kは収束の度合を決めるパラメータであり，本研究では $k = 4$ とし，収束率 99.99%以上を見込んでいる．

4. 時刻列の設定

時刻 0 から上述の収束時刻 t_sまでの状態確率ベクトルの挙動を適切に調べるために，この間の確率ベクトル計算時刻列は，確率ベクトルの変化量の応じて順次設定する．ここでは，確率ベクトルの変化の著しい所では細かく，緩い所では粗く設定するものとした．確率ベクトルの変化を測るための基準を確率ベクトルの変化分の大きさ

$$D = |\pi(t_s) - \pi(t_s(1-\alpha))| \tag{9}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{N}[\pi_i(t_s) - \pi_i(t_s(1-\alpha))]^2} \tag{10}$$

として設定しておく．ここで，$t_s(1-\alpha)$は時刻 0 と収束時刻 t_sとを $1-\alpha : \alpha$ に内分する時刻となる．時刻列の設定は，以下の手続き $Search(0, t_s(1-\alpha))$ の実行による．

$Search(t_a, t_b)$
begin
  if $|\pi(t_b) - \pi(t_a)| > D$ **then**
    begin
      $t_c = (t_a + t_b)/2$;
      t_cを時刻列に加える;
      $Search(t_a, t_c)$;
      $Search(t_c, t_b)$;
    end
end

5. 数値例

最後に，本研究で作成したツールを 2 ユニット並列システムの信頼性評価に適用し，数値例を示す．図 1 の状態推移図にもとづいて，過度状態および定常状態でのアベイラビリティを算出した結果が図 2 の様に得られた．ただし，λを単一ユニット故障率，μを単一ユニット修理率とし，状態 0 が故障ユニットなし，状態 1 が 1 ユニット故障，状態 2 が 2 ユニット故障をそれぞれ表すものとする．また，初期状態は状態 0 である．

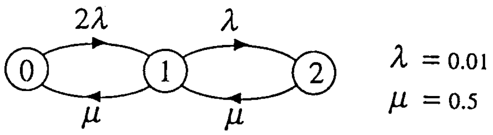

図 1: 2 ユニット並列システムの状態推移図．

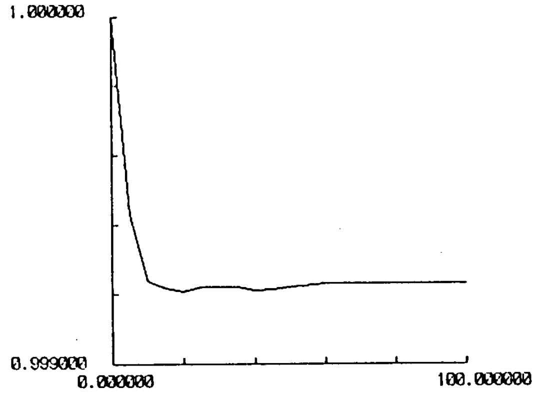

図 2: 2 ユニット並列システムのアベイラビリティ．

謝辞 本研究は，中部電力基礎技術研究所の第 4 回研究助成金の援助により行われた．

文献

(1) 当麻善弘監修，向殿政男編：“コンピュータシステムの高信頼化技術入門”，日本規格協会 (1988).

(2) D. Gross and D. R. Miller: “The Randomization Technique as a Modeling Tool and Solution Procedure for Transient Markov Processes”, *Oper. Res.*, **32**, 2, pp. 343-361 (1984).

(3) 尾崎俊治，福本　聡：“マルコフ過程の極限確率の収束時刻の算出”，電子情報通信学会論文誌，**J71-A**, 4, pp. 1062-1065 (1988).

(4) Satoshi Fukumoto and Shunji Osaki: “A Software Package Tool for Markovian Computing Models and Its Applications”, *Proc. IEEE International Phoenix Conference on Computers and Communications*, pp. 872-873, Phoenix, Arizona, U.S.A. (March, 1990).