1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

空間ポアソン分布の下での周回距離の期待値

01107680　慶應義塾大学　栗田　治　KURITA Osamu

1．はじめに

無限平面上で，点が一定の密度でランダムに分布しているものとする(空間ポアソン分布)．同一平面上に点Qを任意に与えよう．そしてランダムに分布する点を，点Qから近い順に$P_1, P_2, P_3, \cdots$と呼ぶことにする．このとき点Qから出発して，n個の点$P_1, P_2, \cdots, P_n$を順に経由した上で，元の点Qに戻ってくるような周回移動に着目する(図1)．本研究の目的は，この周回距離の期待値を導出することである．ただし，紙面の都合もあるので，以下では特に$n=2$の場合を例にして説明する($n \geq 3$の場合も同様に取り扱える)．

上記のランダムな点を都市内の店舗とみなし，点Qを住民の位置とみなそう．住民は，ある品物を買うために最寄りの店へ行ったのだが，生憎その店にはなかった．彼(彼女)は自分の家から2番目に近い店に直行したのだが，またもや品物はなかった．そこで家から3番目に近い店に直行し…こうしてn店めでやっと品物を買うことができて，家に帰った．ここで言う周回移動とは，こうした人の動きに対応するものである．この問題や，これに付随する幾つかの問題は，将来，都市平面における移動の効率を評価(あるいは推測)してゆくための基礎(定石)の一つとなるものと思われる．

2．k番目に近い点への距離の分布と特性値

無限平面上で点が密度ρでランダムに分布しているものとする．そして任意に与えられる面積Sの領域内に含まれる点の数をxとする．xの分布は(よく知られているように)空間ポアソン分布であり，その確率函数を$p(x, S)$とすると次の通りである：

$$p(x,S) = \frac{(\rho S)^x}{x!} e^{-\rho S} \quad (x = 0, 1, 2, \cdots). \qquad (1)$$

この確率函数は，面積Sの増分ΔSを考慮した微分方程式を解く方法[1]，または二項分布の極限を考える方法[2]で導出される．いま任意に与えた点Qからk番目に近い点をP_kと呼ぶ．また$R_k = \overline{QP_k} (k = 1, 2, \cdots)$と定義する(図2)．このとき$R_k$の確率密度函数を$f_k(r_k)$とすると，これは次式の通りである：

$$f_k(r_k) = \frac{2(\rho\pi)^k}{(k-1)!} {r_k}^{2k-1} e^{-\rho\pi {r_k}^2} \quad (0 \leq r_k < \infty). \qquad (2)$$

R_kの期待値と2乗の期待値は次の通り($k = 1, 2, \cdots$)：

$$< R_k > = \frac{(2k-1)!!}{2^k (k-1)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho}}; \qquad < {R_k}^2 > = \frac{k}{\rho\pi}. \qquad (3)$$

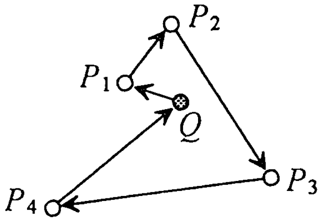

図 1: Qが原点の周回移動($n=4$の例).

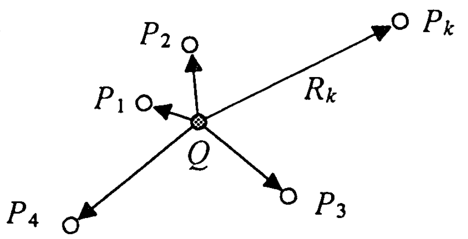

図 2: 点Qにk番目に近い点P_kへの距離R_k.

3．R_2の条件付き密度と(R_1, R_2)の同時密度

まず，$R_1 = r_1$という条件下でのR_2の分布を求めよう．この条件付き累積密度函数を$F_2(r_2|r_1)$と記すと，これは次のように導出される：

$$\begin{aligned} F_2(r_2|r_1) &= \mathrm{Prob.}\{R_2 \leq r_2 | R_1 = r_1\} \\ &= \mathrm{Prob.}\{\text{図3の円環内に点が1つ以上ある}\} \\ &= 1 - \mathrm{Prob.}\{\text{図3の円環内に点が全くない}\} \\ &= 1 - p(0, \pi({r_2}^2 - {r_1}^2)) \quad (\because (1)\text{式}) \\ &= 1 - e^{-\rho\pi({r_2}^2 - {r_1}^2)}. \end{aligned} \qquad (4)$$

これをr_2で微分すれば条件付き確率密度函数を得る：

$$f_2(r_2|r_1) = 2\rho\pi r_2 e^{-\rho\pi({r_2}^2 - {r_1}^2)} \quad (r_1 \leq r_2 < \infty). \qquad (5)$$

これによりR_2の条件付き期待値を計算する：

$$< R_2 | r_1 > = \int_{r_1}^{\infty} r_2 f_2(r_2|r_1)\, \mathrm{d}r_2 = \frac{e^{\rho\pi {r_1}^2}}{\sqrt{\rho\pi}} \Gamma(\frac{3}{2}, \rho\pi {r_1}^2). \qquad (6)$$

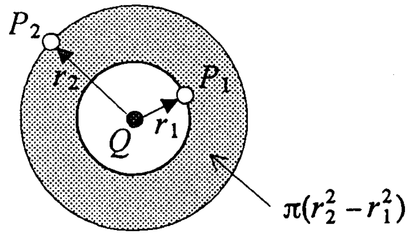

図 3: 半径r_1とr_2の同心円のなす円環領域.

ただし$\Gamma(\cdot,\cdot)$はLegendreの第2種不完全ガンマ函数[3]である：

$$\Gamma(z,p)=\int_p^\infty t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t. \tag{7}$$

(6)に基づいて$<R_2>$を計算すると

$$<R_2>=\int_0^\infty <R_2|r_1> f_1(r_1)\,\mathrm{d}r_1=\frac{3}{4\sqrt{\rho}} \tag{8}$$

となり，勿論(3)の第1式の結果に一致する．

さらに，(R_1,R_2)の同時密度を$g(r_1,r_2)$として記しておく(定義域は$0\le r_1<\infty$かつ$r_1\le r_2<\infty$)：

$$g(r_1,r_2)=f_2(r_2|r_1)f_1(r_1)=(2\rho\pi)^2r_1r_2e^{-\rho\pi r_2{}^2}. \tag{9}$$

4．周回移動 $Q\to P_1\to P_2\to Q$

さて，いよいよ$Q\to P_1\to P_2\to Q$という周回移動を考えよう．この移動距離のうち，$R_1=\overline{QP_1}$と$R_2(=\overline{P_2Q})=\overline{QP_2}$は前節までで論じた．そこで$P_1$から$P_2$へ向かう距離を $X=\overline{P_1P_2}$ と定義する．このとき周回距離は$R=R_1+R_2+X$だから，その平均値は(10)式の通りである．ただし，このうち$<R_1>$と$<R_2>$は(3)の第1式で得られているから，我々が導出せねばならないのは$<X>$のみである：

$$<R>=<R_1>+<R_2>+<X>. \tag{10}$$

5　$<X>$の導出と$<R>$の整理

いま$(R_1,R_2)=(r_1,r_2)$という条件の下でのXの期待値を$<X|(r_1,r_2)>$とすると，$<X>$は次式の通り：

$$<X>=\int_0^\infty\int_{r_1}^\infty <X|(r_1,r_2)>g(r_1,r_2)\,\mathrm{d}r_2\,\mathrm{d}r_1. \tag{11}$$

ここで$<X|(r_1,r_2)>$の幾何確率的な意味を考えると，これは半径r_1の円周上で一様な点P_1と半径r_2の(同心)円周上で一様な点P_2との距離の期待値に他ならない．なぜならP_1とP_2は，位置によらず平均密度ρのランダムな分布の実現値だからである．さらに2つの同心円周の回転対称性により，P_1を固定しP_2が半径r_2の円周上で一様であるとしても(図4-a)，逆にP_2を固定しP_1が半径r_1の円周上で一様であるとしても(図4-b)，一般性は失われない．図4-aと図4-bとで距離の期待値は等しいのである．こうして，点と円周との平均距離展開式[4]を引用すると，次式の通りである：

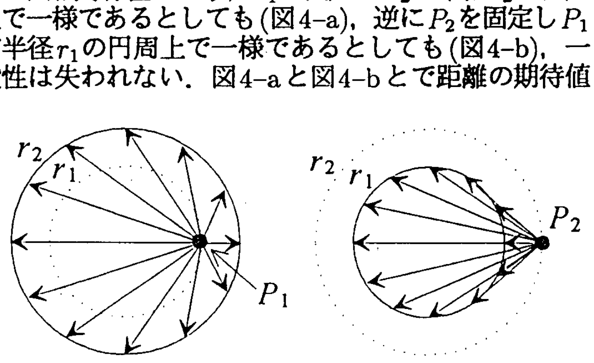

図 4: 2つの円周の間の距離の期待値.

$$<X|(r_1,r_2)>=r_2\sum_{m=0}^\infty\left\{\frac{(2m-3)!!}{2^m m!}\right\}^2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2m}. \tag{12}$$

(11)式に(9)と(12)を代入して計算すると次を得る：

$$<X>=\frac{3}{4\sqrt{\rho}}\sum_{m=0}^\infty\frac{1}{m+1}\left\{\frac{(2m-3)!!}{2^m m!}\right\}^2. \tag{13}$$

ここで，便宜上，半径1の円盤上で一様な2点の間の平均距離の展開公式[5]を引用しよう：

$$\frac{128}{45\pi}=\sum_{m=0}^\infty\frac{4}{5(m+1)}\left\{\frac{(2m-3)!!}{2^m m!}\right\}. \tag{14}$$

喜ばしいことに，(14)式は(13)式に直接的に適用することができ，求める期待値が次の通りに算出される：

$$<X>=\frac{8}{3\pi\sqrt{\rho}}\simeq\frac{0.849}{\sqrt{\rho}}. \tag{15}$$

以上より，求める周回距離の期待値は次式の通り：

$$<R>=\left(\frac{5}{4}+\frac{8}{3\pi}\right)\frac{1}{\sqrt{\rho}}\simeq\frac{2.099}{\sqrt{\rho}}. \tag{16}$$

例えば，ランダムに分布する施設の密度を$\rho=1\mathrm{km}^{-2}$としよう($1\mathrm{km}^2$に1施設)．このとき，任意の点から最も近い施設と2番目に近い施設とを経由して戻ってくる移動距離の期待値は，およそ2.1kmなのである．

6．おわりに

上では2点を経由する場合を述べたが，一般にn点を経由する場合も同様に議論できる．$X_{k-1,k}=\overline{P_{k-1}P_k}$と定義する($k=2,3,4,\cdots$)．このとき期待値$<X_{k-1,k}>$は，半径$r_{k-1}$の円周と半径$r_k$の円周との平均距離$<X|(r_{k-1},r_k)>$に$(R_{k-1},R_k)$の同時密度(本稿の3節と同様の作法で導出可能)を乗じて積分すれば求められるからである．ただし，この場合期待値$<X_{k-1,k}>$は(13)式に類似の無限級数で得られ，それに対する(14)のような喜ばしい関係式は存在しない．

さらに周回距離の2乗の期待値にも同様の接近が可能であるが，計算は少し煩雑になる．何故ならば周回移動を構成する1つ1つの距離が独立ではないからである．

参考文献

[1] 腰塚武志(1986)：都市平面における距離の分布．(谷村秀彦他)都市計画数理，pp.1－55，朝倉書店．
[2] 寺本　英(1990)：ランダムな現象の数学．吉岡書店．
[3] 森口繁一他(1956)：数学公式III(岩波全書)．岩波書店．
[4] 栗田　治(1989)：放射対称な人口分布に関する平均距離．都市計画論文集，No.24，pp.331－336．
[5] 栗田　治(1990)：放射対称な分布における内々平均距離の導出法．日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集，pp.184－185．