巡回セールスマン問題ゲームに関するいくつかの考察

01604880　*毛利裕昭　東京工業大学　(株) 三菱総合研究所
01900730　渡辺隆裕　東京工業大学
01601360　森 雅夫　東京工業大学
01108010　久保幹雄　東京商船大学

1 はじめに

巡回セールスマン問題ゲーム（以下TSPゲームと略す）は、Fishburn and Pollark [FP83] が示した次のような問題に端を発するものである。この論文での問題設定は以下のようなものである。

「ある講演者がいて様々な場所に存在する依頼者から講演を依頼された。講演者は自分の家から出発して依頼者を順にまわって途中で家にはもどらず、最後の講演場所で講演後家に帰るものとする。この時、各依頼者間で講演者の旅費をどのように負担するのが公正であるか？」

この問題に関して Fishburn and Pollark [FP83] は、以下の図1のような（0: 講演者の家、1,2,3: 講演地、枝上の費用は距離費用）

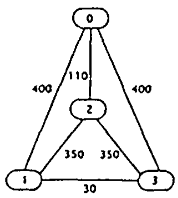

図1

例題において講演ルートを 0-1-2-3-0 と固定して、ある依頼者の限界費用をそのルート費用から該当依頼者のを除いたルートの費用で考えている。さらにこの限界費用をもとにした配分が個人的合理性を満たさないことを示し、総距離を講演者の家からの直接距離で比例配分するような解を含む配分解の公理系を示した。

このゲームは、Potters et al. [PCT92] においては、固定ルートTSPゲームとよばれている。この問題からの自然な発想としてゲームの提携値（費用）を固定ルートに沿って提携先のみを選びだしたルートで考えるのでなく、ある提携における最短ルートを値とするゲームが考えられる。これがTSPゲームである。Potters et al. [PCT92] や Tamir [Tamir88] では、TSPゲームのコアの存在条件について述べられている。

ここでは、TSPゲームについて Fishburn and Pollark の公理群による比例配分解が、2章で示す様々な性質を満たす良い解とされる Shapley 値の公理群とどの程度対応がつくのかを議論した上で、Shapley 値、コア、仁を利用しない簡単な配分方法についていくつかの考察を加える。こうした配分方法以外の配分方法を考える理由は、これらを求める為にはNP困難な問題であるTSPをすべての提携先の部分集合個解かなければならず、提携先の個数が増えると解かなければならない問題が指数的に増大することによる。

2 Fishburn and Pollark の公理系と Shapley 値の公理系

問題を記述するにあたって記号をいくつか述べる。Fishburn and Pollark の議論ではルートが固定なのでこれが最短のルートである場合のみを考える。ルートは家を0として 0-1-2-…-n-0 となっており総費用をCとなっているものとする。

（記号）
n : 講演先の数
N : 講演先の集合 $\{1,\ldots,n\}$
N_0 : $N \cup \{0\}$
c_i : 家0から講演地 i への直接距離
x_i : 講演地 i から講演地 $i+1$ への直接距離
$f_i(c,x)$: Fishburn and Pollark の意味での配分

（Fishburn and Pollark の公理系）
FP-A.1 全体合理性 $\sum_{i\in N} f_i(c,x) = C$
FP-A.2 非負性 $f_i(c,x) \geq 0 \ for \ \forall i \in N$
FP-A.3 個人合理性 $f_i(c,x) \leq 2c_i \ for \ \forall i \in N$
FP-A.4 無名性、中立性
FP-A.5 以下のような (c,x) に関する実数値関数 g、および c に関する実数値関数 h_i が存在する。

$$f_i(c,x) = g(c,x)h_i(c) \quad for \ \forall i \in N$$

以下の定理を Fishburn and Pollark は示して上記の公理系による配分が直接距離の比例配分解（彼らはこれを the propotional willingness to pay と呼んでいる。以降これを比例配分解を呼ぶことにする）を決定することを明らかにしている。

定理 1 *FP-A.1、FP-A.3、FP-A.5 の公理を満たす配分は以下のような比例配分解である。*
$f_i(c,x) = c_i \times (c_1 + x_1 + \cdots x_{n-1} + c_n)/\sum_{i\in N} c_i$

Fishburn and Pollark は、FP-A.5 より弱い公理を導入することによりさらに広いクラスの解も提示しているがここでは比例配分解による議論のみを行なう。また以下では特にことわらない限り、ゲームの値が提携の TSP の最適値 v で与えられるゲーム $G(N,v)$ を考えるものとする。

以下では Shapley 値の公理系との整合性について述べる。

S-A.1 全体合理性
S-A.2 無名性、中立性
については直接に対応している。
S-A.3 ナルプレイヤー（ダミープレーヤー）のゼロ評価
これについては成立していないことが以下のような病的な反例によって示すことができる。ユークリッド空間上においてナルプレーヤー i 以外が0（家）から一直線上にある場合は、i が0にその直線上で一番近い講演地 i^* と0との間にある場合は $v(S \cup \{i\}) = v(S) \ for \ \forall S \subset N - \{i\}$ が

常に成り立つが配分は比例配分であるから、$f_i \neq 0$ である。よってナルプレーヤのゼロ評価性は満たさない。
ダミープレーヤーについては以下のような図2の例で反例を示せる。$v(1) = 2$ であるが $f_1 = 1.5$ となり公理に反する。

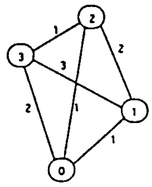

図2

S-A.4 加法性
これについても成立しないことが次の例によって示される。図1によるTSPゲームを $G_1(N,v)$、以下の図3によるゲームを $G_2(N,w)$、図4はその和ゲーム $G_3(N,w)$ を示している。各々のゲームのプレーヤー i の配分を f_i^1、f_i^2、f_i^3 for $\forall i \in N$ とする。

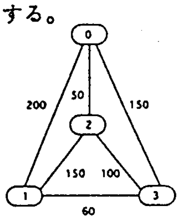

図3

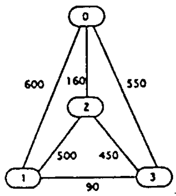

図4

上記においては $f_1^1 + f_1^2 = 596.2 \neq 595.42 = f_1^3$ となり加法性は成立しない。

S-A.5 単調性
これは、成立することが以下のように証明することができる。2つのTSPゲームがあって $G_1(N,v)$、$G_2(N,w)$、として $v(N) \geq w(N)$ かつN以外のすべての提携Sについて $v(S) = w(S)$ ならば、$v(N) \geq w(N)$ および $v(i) = w(i)$ for $\forall i \in N$ が成立しているから各々のゲーム のプレーヤー i の配分を f_i^1、f_i^2 for $\forall i \in N$ とすると定理1より。$f_i^1 \geq f_i^2$ for $\forall i \in N$ が成立する。

S-A.6 自明性
TSPゲームにおいて $v(S) = 0$ for $\forall S \subset N$ ならば、$v(i) = 0$ for $\forall i \in N$ となり。意味的にはすべての講演先が家となる。定理1より $f_i = 0$ for $\forall i \in N$ が成立する。

S-A.7 提携の上での戦略的同等性
$G_1(N,v)$ と次のようなゲーム $G_2(N,w)$ を考える。

$$w(S) = \begin{cases} v(S) + \alpha & S \supset T \\ v(S) & S \not\supset T \end{cases}$$

各々のゲーム のプレーヤー i の配分を f_i^1、f_i^2 for $\forall i \in N$ とする。この場合成立しないことが以下のように示される。$T = \{j\}$ とする。すると $G_2(N,w)$ の作り方により $w(j) = v(j) + \alpha$ および $w(N) = v(N) + \alpha$ が成立する。
定理1より、$i \notin N - T$ について配分 f_i^1、f_i^2 は、各々

$f_i^1 = v(i) \times (v(N)) / \sum_{j \in N} v(j)$
$f_i^2 = v(i) \times (v(N) + \alpha) / (\sum_{j \in N} v(j) + \alpha)$
となり両者は一般的に等しいとは限らないことは明らか。

S-A.8 順序保持性
順序保持性とは、2つのゲーム $G_1(N,v)$、$G_2(N,w)$ を考え、各々のゲーム のプレーヤー i の配分を f_i^1、f_i^2 for $\forall i \in N$ とする。ある提携 T に関しては $v(S) = w(S)$ for $\forall S \neq T$ かつTに属す任意の i、j について $f_i^1 > f_j^1$ for $\forall i, j \in T$ ならば $f_i^2 > f_j^2$ for $\forall i, j \in T$ を満たすことである。これに関しては、Tの要素数は上記の条件の意味から解釈して2以上であるから $v(i) = w(i)$ for $\forall i \in N$ が成立することより条件を満たすことは明らかである。

S-A.9 整合性（縮小ゲーム性）
図2において2を除いた縮小ゲームを $G_2(N', w)$ とすると $f_1^1 = 1.5 \neq 1.93 = f_1^2$ となり整合性は成立しない。

3 TSPゲームの配分の様々な例

ここでは、計算量が少ないいくつかの配分方法を図1の例の解を示しながら紹介する。参考までにShapley値は、(388.3, 113.3, 388.3) また、比例配分解は (391.2, 107.6, 391.2) である。個人的合理性と全体合理性を満たす解としては総節約額均等配分法があるが (490, -90, 490) となり講演地2が利得を得るような配分になってしまう。また、限界費用ベースの配分方法では残余均等配分法がありこれは、(286.7, 316.7, 286.7) となり講演地2が講演者の家から近いにも関わらず大きな負担を負うことになる。最後に代替的回避費用法であるがこれは配分を i の限界費用を MC_i とした時
$MC_i + \frac{v(i) - MC_i}{\sum_{j \in N}(v(j) - MC_j)} \times (v(N) - \sum_{j \in N} MC_j)$ で計算する方法で (378.8, 132.47, 378.8) となる。Potters et al. [PCT92] でも表現はことなるが個人合理性、全体合理性、すくなくとも限界費用を負担する配分方法としてコメントされている。（ただし、コアを与えているとはかぎらない）これは、この場合Shapley値、比例配分解と「2に負担が軽い」という意味では似た結果となっている。

参考文献

[FP83] P.C.Fishburn and H.O.Pollark: Fixed Route Cost Allocation, *American Mathematical Monthly* 90 pp 366 – 378 (1983).

[PCT92] J.A.M.Potters, I.J.Curiel and S.H.Tijs Travelling Salesman Games, *Mathmatical Programming*, Vol.53, pp199 – 211 (1992).

[Tamir88] A.Tamir On the Core of a Traveling Salesman Game, *Operations Research Letters* 8 , pp 31 – 34 (1988).

[SU94] 鈴木光男 新ゲーム理論, 勁草書房 (1994).