M／M／mにおける吸収時点の分布

01402130　東京都立大学　*中塚利直　NAKATSUKA Toshinao

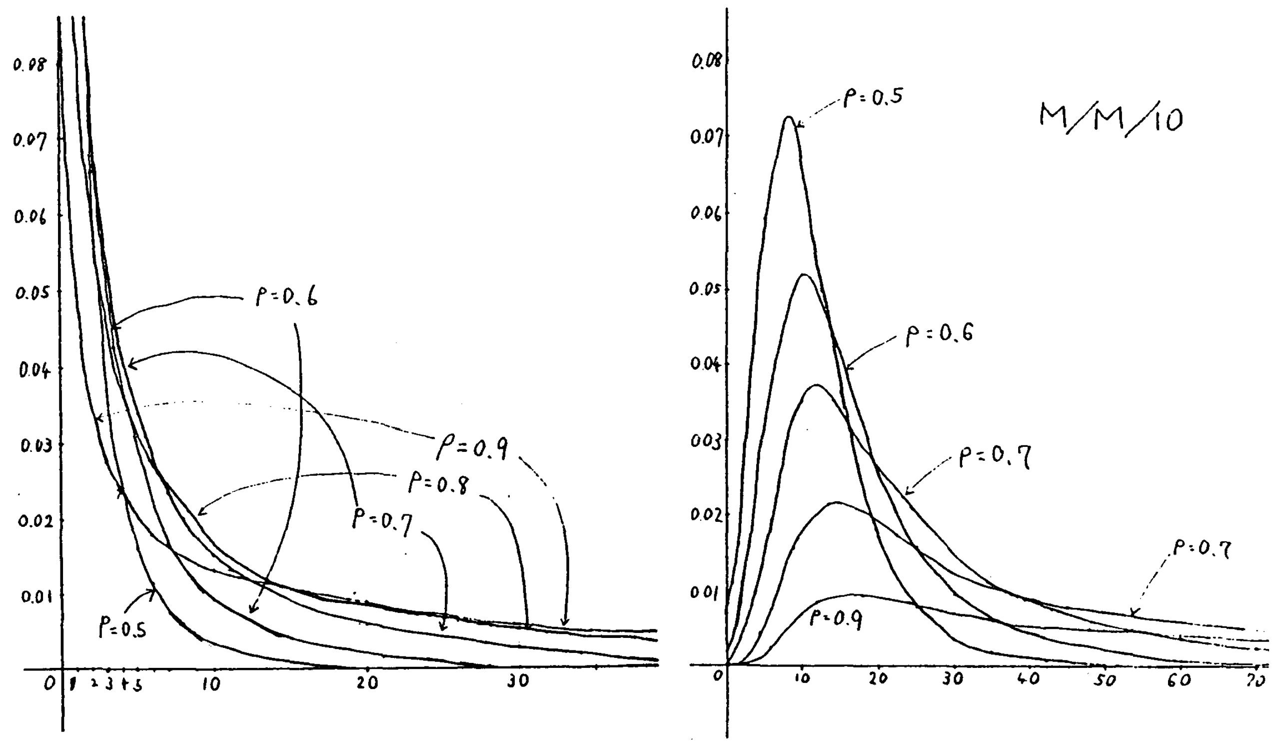
0時点では空である待ち行列システムM／M／m／FIFO は、どの時点で定常状態になったと見なせばよいかという問題は既にいくつかの研究がなされている。従来の研究では、定常状態への到達時点の定義そのものが曖昧であったり、便宜的であったりする。また、主に系内客数の transient解の平均を利用している文献が多い。本発表では吸収過程との一致時点Tをもって定常状態への到達時点と定義し、Tの分布をシミュレーションによって求める。

状態として無限次元ベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots)$ を考える。$(0\leqq)\ x_1\leqq\cdots\leqq x_m$は現在サービスを受けている客の残りサービス時間、$x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots$は待っている客のサービス時間，客のいない番号では $x_i=-1$ とおく。0時点で初期状態$\boldsymbol{a}$から出発したｔ時点の状態を$\boldsymbol{x}_t(\phi, \boldsymbol{a})$と表す。$\phi$は入力である。空の状態を$\boldsymbol{b}_0$とすると、我々の知りたいのは$\boldsymbol{x}_t(\phi, \boldsymbol{b}_0)$がどの時点で定常状態になるかである。この状態表現ではある時点$t=s$で初期状態が異なる二つの状態が一致するならば、$\boldsymbol{x}_s(\phi, \boldsymbol{a})=\boldsymbol{x}_s(\phi, \boldsymbol{b}_0)$ならばその後も一致する。つまり、

$$\boldsymbol{x}_t(\phi, \boldsymbol{a})=\boldsymbol{x}_t(\phi, \boldsymbol{b}_0)\quad : t\geqq s.$$

この性質はこの状態表現の大きな特徴であり、系内客数だけではこの特徴を持ち得ない。

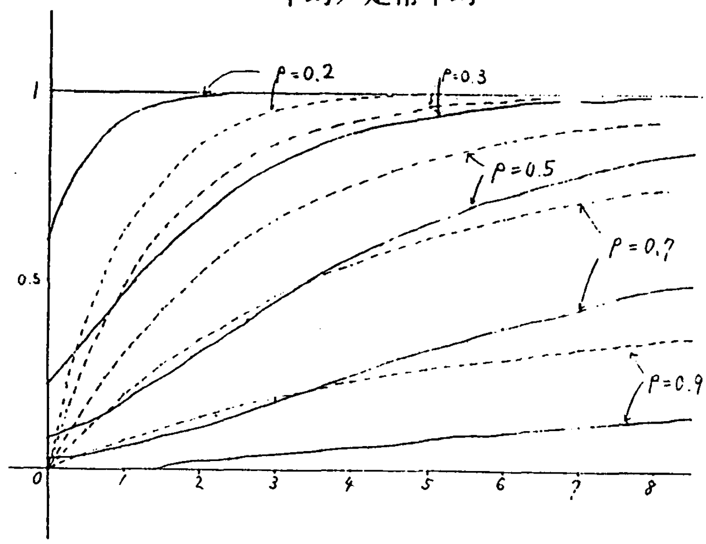
M／M／mでは定常状態の分布が求まるので、0時点での状態がその分布をする状態過程を考えてみる。これは吸収過程の特別の場合であり、$\boldsymbol{x}^*_t(\phi)$と表そう。$\boldsymbol{x}^*_t(\phi)$と$\boldsymbol{x}_t(\phi, \boldsymbol{b}_0)$とは確率１で一致することが分かっているので、その時点をＴとしよう。$\boldsymbol{x}^*_t(\phi)$は定常過程であるから、本発表ではＴこそ定常状態への到達時点とする。



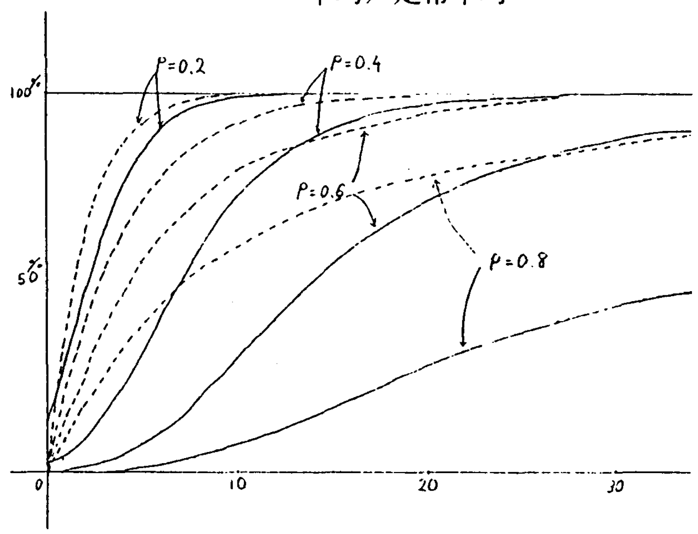
時点Tはϕとaに依存する。したがって確率分布である。ϕは事後的に観察することは可能であるが、aは事前事後を問わず観察不能である。よってTそのものを現実のデータから見いだすことは不可能である。しかし、確率分布が分かっていれば、「これこれの時点までに到達している確率は何%である。」という言い方ができるので実務上も有益であろう。

Tの分布関数を数学的に引き出すことは困難なようである。そこでシミュレーションで求めた。また従来の議論と比較するために各時点での系内客数の平均も求めた。これらの結果にrelaxation timeも加えて判断すると、従来の方法は、過小評価しているのではないかという疑いを抱かせる。特に大きなρに対しては平均と吸収点のどちらを基礎とするかが重要になってくるようである。

M/M/5　分布関数 ——
平均／定常平均 ------



M/M/10　分布関数 ——
平均／定常平均 ------



平均/定常平均98%点とその点の吸収点分布における確率（%），並びにrelaxation time

ρ	0.1	0.3	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
M=5　98%点	1.90	5.94	12.54	19.74	40.9	107.4	535.5
吸収点分布	99.8%	96.6%	93.4%	91.9%	93.2%	94.8%	96.8%
M=10　98%点	3.93	11.68	20.5	26.78	42.12	99.63	474
吸収点分布	98.1%	94.0%	88.8%	84.0%	81.4%	84.8%	92.1%
$RT=\rho/\{\lambda(\sqrt{\rho}-1)^2\}$			5.8284	9.8412	26.237	71.777	341.76
$\tau_R=\rho/\{1.4(1-\rho)^2\}$	0.08818	0.4373	1.4286	2.6786	5.5556	14.286	64.286
$4\tau_R$	0.35272	1.7492	5.7143	10.714	22.222	57.143	257.14