

## 区間 AHP における整合度算出の提案

01206350 東京理科大学 \*杉山 学 SUGIYAMA Manabu  
01700910 東京理科大学 山田善靖 YAMADA Yoshiyasu  
02202080 東京理科大学 砂川雅彦 SUNAGAWA Masahiko

### 1. はじめに

AHP (Analytic Hierarchy Process) は、Saaty によって提唱された人間の主観的判断による意思決定手法であり、多数の分野において数多く適用されている。AHP では、各階層ごとに各要素間の重要性について一対比較を行い、評価値を1つ与えている。一方、この一対比較の評価値を区間で与える方法が文献 [1, 2, 5] 等で示されており、これを区間 AHP と呼ぶことにする。

区間 AHP では、従来の AHP のように一対比較の結果として与えられた一対比較行列の整合性を判断する方法が確立されていない。つまり、区間値で与えられた一対比較行列の整合度 (C.I. : consistency index) が議論されていない。そこで本研究では、区間 AHP における整合度を算出する方法を提案する。そして、この整合度算出方法を用いた数値例を示す。

### 2. AHP における整合度

文献 [3, 4, 6] 等に AHP の整合度 (C.I.) について詳しい記述があるので、本章では詳しい記述を省き、従来の AHP における整合度を以下のように簡単にまとめ、記述する。

AHP では、各階層ごとに各要素間の重要性について一対比較を行う。その一対比較の結果として与えられた評価値を行列形式で表現したものを、一対比較行列  $A$  と呼び、次のように表現する。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & 1 & a_{ij} & \vdots \\ \cdots & \frac{1}{a_{ij}} & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & & & 1 \end{bmatrix}$$

この一対比較行列  $A$  が、どの程度整合性があるのかを表す尺度として、Saaty は整合度 (C.I.) を提案している。この整合度は、一対比較行列  $A$

の最大固有値  $\lambda_{max}$  を用いて以下のように算出するものである。

$$Aw = \lambda_{max}w, \sum_{j=1}^n w_j = 1. \quad (1)$$

[整合度]

$$\text{整合度 (C.I.)} = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}. \quad (2)$$

一対比較行列  $A$  が完全な整合性を持つ場合には、整合度が0となり、この値が大きくなるにつれて、一対比較行列  $A$  の整合性が悪くなる。また、Saaty はこの整合度が0.1 以上になった場合には、一対比較行列  $A$  の値を再検討しなければならないことを、経験則より提案している。

### 3. 区間 AHP における整合度

本章では、まず区間 AHP における整合度算出モデルを提案し、ついで区間 AHP における整合度を定義する。この定義は、従来の AHP における整合度の定義に対応した形となっている。

従来の AHP と同様に区間 AHP でも、各階層ごとに各要素間の重要性について一対比較を行う。しかし区間 AHP では、その一対比較の結果として与えられた評価値が区間であり、それを行列形式で表現したものを、区間値で与えられた一対比較行列  $A^I$  とし、次のように表現する。

$$A^I = \begin{bmatrix} 1 & [a_{12}^L, a_{12}^U] & [a_{13}^L, a_{13}^U] & \cdots & [a_{1n}^L, a_{1n}^U] \\ & 1 & [a_{23}^L, a_{23}^U] & \cdots & [a_{2n}^L, a_{2n}^U] \\ & & 1 & [a_{ij}^L, a_{ij}^U] & \vdots \\ \cdots & & [\frac{1}{a_{ij}^U}, \frac{1}{a_{ij}^L}] & \ddots & \vdots \\ & & \vdots & & 1 \end{bmatrix}$$

文献 [1, 2, 5] 等では、この区間値で与えられた一対比較行列  $A^I$  から様々な方法により各要素間の重要度  $w^I$  を算出している。しかし区間 AHP では、従来の AHP においてなされた一対比較行

列  $A^I$  に対する整合性の判断基準がない。そこで本研究は、区間値で与えられた一対比較行列  $A^I$  に対して、従来の AHP 同様に整合度を用い、その行列のなかで整合性が最悪の場合の行列の組を基準にして判断することを提案する。また従来の AHP 同様に、この最悪の整合度が 0.1 以上になった場合には、区間値で与えられた一対比較行列  $A^I$  の区間値を再検討しなければならないとする。

### 3.1. 整合度算出モデル

本節では、区間値で与えられた一対比較行列  $A^I$  のなかで整合性が最悪の場合の行列の組の最大固有値を算出するためのモデルを、次のように定式化する。

#### [整合度算出モデル]

$$\begin{aligned} & \text{最大化 } \lambda, \\ & \text{条件 } \sum_{i=1}^n w_i = 1, \\ & \quad a_{ij}^L \leq x_{ij} \leq a_{ij}^U, \quad (i, j = 1, \dots, n), \\ & \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} w_j = \lambda w_i, \quad (i = 1, \dots, n), \\ & \quad x_{ij} x_{ji} = 1, \quad (i, j = 1, \dots, n), \\ & \quad w_i > 0, \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (3)$$

この整合度算出モデルの最適目的関数値の解を  $\lambda^*$  とする。

### 3.2. 整合度の定義

区間値で与えられた一対比較行列  $A^I$  の整合度 (C.I.I.: consistency index in interval judgments) を以下のように定義する。

#### [定義 1] 区間 AHP における整合度

$$\text{整合度 (C.I.I.)} = \frac{\lambda^* - n}{n - 1}. \quad (4)$$

### 4. 数値例

本研究で提案した区間 AHP における整合度算出方法を、実際に用いた数値例を以下に示す。

#### [例 1]

$$A^I = \begin{bmatrix} 1 & [2, 4] & [3, 5] & [3, 5] \\ & 1 & [\frac{1}{2}, 1] & [2, 5] \\ & & 1 & [\frac{1}{3}, 1] \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$w^I = \begin{bmatrix} [0.3341, 0.8496] \\ [0.1147, 0.3378] \\ [0.0824, 0.2428] \\ [0.0726, 0.2259] \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\text{整合度 (C.I.I.)} = 0.0183. \quad (7)$$

#### [例 2]

$$A^I = \begin{bmatrix} 1 & [4, 5] & [2, 4] & [6, 7] \\ & 1 & [2, 3] & [5, 8] \\ & & 1 & [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$w^I = \begin{bmatrix} [0.4243, 0.7420] \\ [0.1917, 0.3376] \\ [0.0612, 0.1283] \\ [0.0701, 0.1303] \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\text{整合度 (C.I.I.)} = 0.1859. \quad (10)$$

### 5. おわりに

本研究では、区間 AHP における整合度を算出する方法を提案した。この方法を用いることで、従来の AHP と同様に区間値で与えられた一対比較行列に対しても整合性の議論ができるようになった。

### 参考文献

- [1] Arbel, A.: Approximate Articulation of Preference and Priority Derivation, *European Journal of Operational Research*, Vol.43 (1989), 317-326.
- [2] Arbel, A. and Vargas, L.G.: The Analytic Hierarchy Process with Interval Judgments, *Multiple Criteria Decision Making*, Springer-Verlag, (1992), 61-70.
- [3] 森雅夫, 宮沢政清, 生田誠三, 森戸晋, 山田善靖: オペレーションズリサーチ II —意思決定モデル—, 朝倉書店, 1989.
- [4] Saaty, T.L.: *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill, 1980.
- [5] Saaty, T.L. and Vargas, L.G.: Uncertainty and Rank Order in the Analytic Hierarchy Process, *European Journal of Operational Research*, Vol.32 (1987), 107-117.
- [6] 刀根薫: ゲーム感覚意思決定法 —AHP 入門—, 日科技連, 1986.