1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

並列分枝限定法を用いた容量制約付き枝巡回路問題の厳密解法

02102490 東京理科大学 木内 正明* KIUCHI Masaaki
02201800 東京理科大学 品野 勇治 SHINANO Yuji
01206100 防衛大学校 猿渡 康文 SARUWATARI Yasufumi
01504250 東京理科大学 平林 隆一 HIRABAYASHI Ryuichi

1 はじめに

一般に巡回路問題は，Node Routing Problem, Arc Routing Problem, General Routing Problem の３つに大別される [1]．容量制約の付加された枝巡回路問題である，容量制約付き枝巡回路問題 (Capacitated Arc Routing Problem : CARP) に対しては，最適解に対する下界値計算法，および幾つかの近似解法などが提案されている．しかし，最適解を求める厳密解法は，"Node Duplication Lower Bound" を用いた分枝限定法による解法 [2] の他には提案されていない．ところが，この解法によっても，問題の規模が大きくなると，実用的な時間内で最適解を求めることが難しくなることが知られている．一方，並列処理は分枝限定法に対する高速化の手法の一つとして，近年盛んに研究されている [3]．

本発表では，容量制約付き枝巡回路問題に対する，Node Duplication Lower Bound を用いた分枝限定法による厳密解法の構造を生かし，分枝限定法に並列処理を適用したときの効果について考察する．

2 容量制約付き枝巡回路問題

$G=(V,E)$ をループや並行枝のない無向グラフとする．ここで，Vは頂点集合，Eは枝集合である．$v_0 \in V$をデポ (depot)，$c \in Q_+^E$を非負のコスト関数とする．ここで，Q_+^Eは非負の有理数の集合である．$q \in Q_+^E$を非負の需要量 (demand) 関数とする．Dを許容量 (capacity) と呼び，$D \geq \max_{e\in E} q(e)$ であるものとする．W_iを，配達員 i の配達経路 (closed walk) とする．$V(W_i)$ を W_i中の頂点集合，$E(W_i)$ を W_i中の枝集合とする．

以上の定義を用いて，容量制約付き枝巡回路問題 (CARP) を定式化すると以下のようになる [2]．

$$\text{find} \begin{cases} K & : \text{ positive integer}, \\ W_1, W_2, \cdots, W_K & : K \text{ closed walks in } G, \\ F_i & : \subset E(W_i), i=1,2,\cdots,K. \end{cases}$$

$$\text{subject to.} \quad V(W_i) \ni v_0, i=1,2,\cdots,K, \tag{1}$$

$$\bigcup_{i=1}^{K} F_i = E^D, F_i \cap F_j = \emptyset, (E^D = \{e \in E | q(e) > 0\}), \tag{2}$$

$$\sum_{e\in F_i} q(e) \leq D, i=1,2,\cdots,K, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{K} \sum_{e\in E(W_i)} c(e) \text{ is minimum.} \tag{4}$$

3 下界値の計算方法

3.1 Node Duplication Lower Bound

Node Duplication Lower Bounding Procedure(NDLBP) は，1992 年猿渡 [2] によって提案された下界値計算法である．NDLBP は，他の CARP に対する下界値計算法に比べ精度の良い下界値を求められることが，理論的にも実験的にも確かめられている [2]．

CARP では K本の配達経路上のコストを和を最小にしたいが，需要のある枝は必ず１人の配達員が通るので，総コストは需要のある枝のコストの和よりも小さくなることはない．つまり，各配達経路の内，需要のない枝のコストの和を最小にすれば，総コストは最小となるわけである．そこで，各配達経路上の需要のある枝のみを独立させて考え，一つの需要のある枝と他の需要のある枝を結ぶ，需要のない枝のコストの和を最小にすることを考える．このとき，配達員の許容量は考慮しないこととする．このようにして得られた，各配達経路上のコストの和の最小値は，容量制約付き枝巡回路問題に対する下界値となる．

一方，全ての需要を満たすことのできる配達員の人数の最小値Hは，(5) 式によって求めることができる．

$$H = \lceil \frac{Q}{D} \rceil, (Q = \sum_{e\in E} q(e)), \tag{5}$$

3.2 NDLBP の概略

初めに，与えられたグラフから Node Duplicated Graph $G_1=(V_1,E_1)$ を構築する．G_1は，与えられたグラフの頂点を複製した完全グラフである．頂点を複製する数は，デポについてはH個，そのほかの頂点については，その頂点に接続する，需要のある枝の数とする．ここで，頂点iを複

* 東京理科大学大学院工学研究科経営工学専攻
〒204 東京都新宿区神楽坂 1-3
e-mail: kiuchi.ms.kagu.sut.ac.jp

製してできた頂点の集合を $family(i)$ と表記する．G_1での各枝の需要量は，もとのグラフにおいて需要があった枝についてはそのまま，その他の枝については0とする．また，各枝のコストは，全ての需要のある枝は∞，同じ$family$内の需要のない枝は0 (ただし，デポの $family$内の枝は∞)，また異なる$family$間の需要のない枝については，もとのグラフでの最短路のコストと定める．

次にG_1から，２本の需要のある枝の需要量の和が，配達員の許容量Dを超えてしまうとき，その２本の需要のある枝の間を結ぶ，全ての需要のない枝のコストを∞にすることによって，Modified Graph $G_2 = (V_2, E_2)$ を構築する．この手続きは，配達員の許容量を考慮しない下界値計算では本質的なものではないが，より精度の良い下界値を求めるためには欠かせないものである．

さらに，G_2から Matching Graph $G_3 = (V_3, E_3)$ を構築する．G_3は，G_2からデポを複製した頂点の内，需要のある枝が接続する頂点，およびそれらの頂点に接続していた全ての枝を削除したグラフである．

このようにして得られたG_3上で，最小コスト完全マッチング (Minimum Cost Perfect Matching) を求める．得られたマッチング Mの重さを $c(M) = \sum_{e\in M} c(e)$，需要のある枝のコストの和を $c(E^D)$ で表すと，下界値 $NDLB$は (6) 式によって得られる．

$$NDLB = c(E^D) + c(M) \tag{6}$$

4　並列分枝限定法を用いた厳密解法

4.1　Tour Construction Algorithm

Tour Construction Algorithm(TCA) は，1992年に猿渡[2] によって提案された，CARP に対する最初の厳密解法である．その後，CARP に対する新たな厳密解法は未だ提案されていない．TCA は，交互道 (需要のある枝と需要のない枝が交互に現れる枝の列) 上の需要量の和が許容量 Dを越えないように，需要のある枝間を結ぶ需要のない枝をうまく選び，交互道が配達員の経路 W_iを構成する様，分枝限定法によって交互道を一本づつ構築していく解法である．

本発表で報告する，Parallel Tour Construction Algorithm(PTCA) は，TCA の構造を生かし，並列分枝限定法を用いることによって，より高速化を図った解法である．

4.2　PTCA の概略

NDLBP によって得られたマッチング Mに含まれる枝1本毎に，その枝をマッチングに選ぶことを禁止して，新たに最小コスト完全マッチングを求め下界値を計算する．それらの下界値 ($|M| = 9$ ならば9個の下界値) の内，最も大きな値を与えるマッチングを生成したときに禁止した，マッチング Mに含まれた枝 $(i,j) \in M$を，次の子問題でマッチングに使う，または使わないとすることによって分枝操作を行う．つまり，枝 (i,j) を配達員の経路に必ず用いるという条件を付加した子問題を左子問題，枝 (i,j) を配達員の経路に必ず用いないという条件を付加した子問題を右子問題とする．

並列分枝限定法では，各子問題間に解の評価を行う上での依存関係が少ないことに着目し，同時に複数個の子問題の評価を行いながら解を探索する．そこでPTCA では，G_2と供に，どの枝を配達員の経路に必ず用いるか，または用いないかという情報を，マスタープロセッサから各子問題を解くための個々のプロセッサへ送り，各子問題内でG_3を構築し，最小コスト完全マッチングを解くことによって $NDLB$を求める．

各子問題でより良い下界値を得るために，ある需要のある枝 (k,l) をそれまでに構築された交互道に加えると，交互道上の需要量の和が許容量Dを超えるとき，交互道と (k,l)を結ぶ全ての需要のない枝を，新たにマッチングに用いることを禁止する．また，現在の配達員の人数では，許容量Dに対する制約 ((3) 式) をみたす経路が構築できなくなった場合には，各子問題で$NDLB$を求める際に完全マッチングが得られなくなる．この場合には，G_2にデポの複製である頂点を新たに2個加え，配達員の人数を1人ずつ増やしていくことによって完全マッチングを導く．

これらの手続きを繰り返し適用していくことによって，(1),(2),(3) 式をみたす上界値を与える解が得られる．これらの解の内で，(4) 式をみたすことが保証された解が最適解となる．

本発表では，TCA によって解かれた幾つかの問題に対して，PTCA を適用した数値実験結果に基づいて，並列化の効果を報告する．

参考文献

[1] Bruce L. Golden, Richard T. Wong, “Capacitated Arc Routing Problems,” *NETWORKS*, Vol.11, pp.305–315 (1981).

[2] Yasufumi Saruwatari, “Contribution to the Capacitated Arc Routing Problems,” Doctoral Thesis, Science University of Tokyo (1992).

[3] Yuji Shinano, “Parallel Branch and Bound Algorithms with Master-Slave Strategy on a Cluster of Workstations,” Master’s Thesis, Science University of Tokyo (1994).